Uber Flächen 5. Ordnung
mit einer doppelten kubischen Raumkurve.

Inaugural-Dissertation,

welche

nebst den beigefügten Thesen

mit Genehmigung der hohen

philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

am Freitag, den 15. Januar 1904, vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich verteidigen wird

Waldemar Jaeckel.

AGAD. LAND.BAT. BIBL.

Opponenten:

Herr Dr. phil. **Adalbert Grüttner,**

Herr cand. phil. **Otto Toeplitz.**

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1904.

Dem Andenken

meiner lieben Eltern

gewidmet.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihr Entstehen zwei Aufsätzen, welche von Herrn Clebsch in Math. Ann. Bd. I. S. 253 und Hern Sturm in Math. Ann. Bd. IV S. 249 über eine grössere Reihe von Flächen 4. und 5. Ordnung veröffentlicht worden sind. Sie steckt sich das Ziel, die dort zumeist ohne nähere Begründung angegebenen Resultate, welche sich auf eine Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve beziehen, zu beweisen und zu einem gewissen Abschlusse fortzuführen. Wesentliche Dienste leistet dabei eine Abbildung auf eine Ebene, welche neu ist. Gegen Ende werden spezielle Fälle der Fläche betrachtet, wie sich solche durch Spezialisierung einer Erzeugung der allgemeinen Fläche ergeben, wobei es weniger auf die Behandlung der einzelnen Fälle als solcher, als vielmehr auf Darlegung ihres inneren Zusammenhanges mit der allgemeinen Fläche ankommt.

Einleitung.

1. Soll eine gerade Linie auf eine Fläche n Ordnung zu liegen kommen, so muss sie mit ihr $n + 1$ Punkte gemein haben. Damit gleichbedeutend ist die Forderung, dass die Gerade $n + 1$ ebene Schnitte der Fläche je einmal in getrennten Punkten treffe: es werden ihr also damit $n + 1$ u. z. einfache Bedingungen auferlegt. Werden auch räumliche, auf der Fläche verlaufende Kurven unter die zu treffenden Kurven aufgenommen, so hat man jede solche $\varkappa$fach zu treffende Kurve ($\varkappa \leqq 4$) als $\varkappa$fache Bedingung zu zählen.

Da nun im Falle einer Fläche von der Ordnung $n > 3$ die Zahl $n + 1$ der Bedingungen grösser als vier ist, also grösser als die Anzahl der von einer Gerade erfüllbaren Bedingungen, so wird es auf den allgemeinen Flächen von höherer als der dritten Ordnung keine Geraden mehr geben.

Spezialisiert man aber eine solche etwa in der Weise, dass man auf ihr eine μfache Kurve ($\mu > 1$) annimmt, so wird jede der ∞^3 sie einmal treffenden Geraden (Sekanten) die Fläche nur noch in $n + 1 - \mu$ Punkten m. a. W. auf ebensovielen ebenen Schnittkurven zu treffen haben, wenn sie auf ihr gelegen sein soll.

Weiter müsste eine der ∞^2fach vorhandenen Doppelsekanten der μfachen Kurve zu diesem Zwecke die Fläche noch in $n + 1 - 2 \cdot \mu$ Punkten, allgemein eine $\varkappa$fache Sekante ($\varkappa \leqq 4$) sie noch in $n + 1 - \varkappa \cdot \mu$ Punkten treffen.

Man ersieht, wie sich durch Annahme einer vielfachen Kurve die Anzahl der Bedingungen, welche die Geraden des Raumes zu erfüllen haben, um auf der Fläche zu liegen, im Vergleich zum allgemeinen Falle, wo μ immer nur gleich 1 ist, herabmindern lässt.

2. Wenden wir dies auf die allgemeine Fläche 5. Ordnung an, so folgt zunächst, dass jede etwa auf ihr gelegene Gerade sechs Bedingungen zu erfüllen hätte, also mehr als eine Gerade des Raumes zu erfüllen vermag. Besitzt die Fläche aber insbesondere eine Doppelkurve ($\mu = 2$), so hätte jede der sie einmal treffenden Geraden wegen ihrer beiden Schnittpunkte mit der Fläche in ihrem Stützpunkte noch $(5 + 1) - 1 \cdot 2 = 4$ im ganzen also 5 Bedingungen zu genügen, um auf der Fläche zu liegen, jede Doppelkante der Doppelkurve aber noch $(5 + 1) - 2 \cdot 2 = 2$ im ganzen also $2 + 2 = 4$ Bedingungen. 4 Bedingungen aber vermag bereits eine endliche Anzahl von Geraden zu genügen.

Von etwaigen dreifachen Sekanten der Doppelkurve, hat ja jede bereits $3 \cdot 3 = 6$ Punkte mit der Fläche gemein, gehört ihr also ganz an.

Im folgenden sollen nun speziell diejenigen Flächen 5. Ordnung untersucht werden, welche eine doppelte Raumkurve von der dritten Ordnung besitzen. Wir benennen zur Abkürzung die Fläche mit F^5_3, die Doppelkurve mit D^3. Da hier dreifache Sekanten der Doppelkurve nicht vorkommen, werden wir also dem Gesagten zufolge eine endliche Anzahl auf unserer Fläche verlaufender Geraden zu erwarten haben, die sich unter den Doppelsekanten der Doppelkurve befinden müssen. Wir beginnen die Untersuchung der Fläche mit der Ermittelung dieser Zahl.

§ 1.

Die 11 Geraden der Fläche.

3. Wie gezeigt, ist jede Gerade der Fläche Doppelsekante der kubischen Doppelkurve D^3. Unter ihren ∞^2 Doppelsekanten haben diejenigen, welche ausserdem noch zwei beliebige ebene Schnitte der Fläche in getrennten Punkten treffen mit ihr insgesammt $2 \cdot 2 + 2 = 6$ Punkte gemein und gehören ihr ganz an.

Die Ermittlung der Zahl der Geraden unserer Fläche kommt also hinaus auf die Ermittlung derjenigen Doppelsekanten von D^3, welche ausserdem zwei ebene Schnittkurven 5. Ordnung in verschiedenen Punkten treffen.

Mit Rücksicht auf späteres lösen wir gleich die allgemeinere Aufgabe, bei der die einmal zu treffenden (ebenen oder räumlichen) Kurven von m. und n. Ordnung sind: Wie bekannt bilden die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche irgend eine Gerade des Raumes treffen, eine Regelfläche 4. Grades; dieselbe wird von einer beliebigen Kurve m. Ordnung 4m mal getroffen; d. h.: Die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche eine Kurve m. Ordnung treffen, erzeugen eine Regelfläche $4m^{ten}$ Grades. Diese trifft eine andere Kurve der Ordnung n 4mn mal, d. h. 4mn Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve treffen ausserdem noch zwei beliebig im Raume gelegene Kurven m. und n. Ordnung.

In Anwendung auf unseren Fall, wo $m = n = 5$ ist, liefert dies die beiden Sätze:

Die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche eine ebene Kurve 5. Ordnung treffen, erzeugen eine Regelfläche 20. Grades. Und: 100 Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve treffen ausserdem noch zwei ganz beliebig im Raume gelegene ebene Kurven 5. Ordnung.

In unserem Falle liegt freilich nicht die allgemeine Lage der drei Kurven vor: denn jede der beiden ebenen Kurven 5. Ordnung, „C^5“ und „$C_1{}^5$“, enthält die drei Punkte A, B, C bzw. A_1, B_1, C_1, in denen ihre Ebene die D^3 schneidet, gleichfalls und zwar als Doppelpunkte; ausserdem haben die

beiden Kurven C^5 und C_1^5 fünf Punkte mit einander gemein, diejenigen, in denen die Schnittlinie ihrer Ebene die Fläche schneidet.

Für unseren Zweck unbrauchbar und daher abzuziehen sind alle diejenigen Treffgeraden der drei Kurven, von deren vier Stützpunkten zwei oder mehr zusammenfallen, da diese die Fläche in Wirklichkeit nur in 5 oder noch weniger Punkten treffen, also den mehrfach angewandten Schluss nicht zulassen. Die von einem der sechs Punkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 etwa A ausgehenden Doppelsekanten der D^3 bilden einen Kegel II. Grades, welcher die Ebene der anderen Kurve, C_1^5, in einem Kegelschnitt schneidet, der seinerseits mit dieser Kurve, C_1^5, 10 Punkte gemein hat. Zu diesen gemeinsamen Punkten beider Kurven gehören auch die Punkte A_1, B_1, C_1 welche als Doppelpunkte doppelt, zusammen für $3 \cdot 2 = 6$ gemeinsame Punkte zählen; es verbleiben noch 4 anderswo auf C_1^5 gelegene Punkte.

Die 4 nach ihnen von A ausgehenden Strahlen mögen vorerst betrachtet werden: Da A Doppelpunkt auf C^5 ist und er somit als Punkt sowohl des einen wie des anderen Astes seiner Kurve betrachtet werden darf, kann jede unserer 4, von ihm ausgehenden Geraden als von ihm sowohl als Punkt des einen wie des andern Astes aus gelegt betrachtet werden und zählt daher als Transversale unserer drei Kurven D^3, C^5, C_1^5 doppelt.

Von einem Punkte A gehen also $2 \cdot 4 = 8$ Transversalen aus, welche des weiteren in zwei getrennten Punkten treffen, von allen 6 Punkten A, B, C, A_1, B_1, C_1, also $6 \cdot 8 = 48$ Geraden dieser Art.

Die vorhin von der Betrachtung ausgeschlossenen Geraden welche von A nach A_1, B_1, C_1, gehen, treffen in diesen Punkten Doppelpunkte von C_1^5 und können darum als sowohl den einen wie den anderen Ast von C_1^5 treffend angesehen werden; diese Strahlen zählen daher nochmals doppelt, also vierfach. Solcher Verbindungsgeraden von A, B, C einerseits, A_1, B_1, C_1 andererseits giebt es 9, zu-

sammen zählen sie für $9 \cdot 4 = 36$ Transversalen der drei Kurven D^3, C^5, $C_1{}^5$.

Schliesslich sind auch noch die 5 Strahlen abzuziehen, welche von den fünf Treffpunkten der Kurven C^5 und $C_1{}^5$ als Doppelsekanten an D^3 gehen.

Im ganzen entfallen also von den 100 Transversalen des allgemeinen Falles $48 + 36 + 5 = 89$ als für unseren Zweck unbrauchbar und nur die übrigbleibenden 11 treffen D^3, C^5, $C_1{}^5$ in getrennten Punkten, gehören also als Geraden der Fläche an.

Wir haben daher das Ergebnis:

Die Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve besitzt 11 Geraden.

4. Der Herleitung gemäss liegen diese 11 Geraden auf einer gewissen Regelfläche; jede Erzeugende einer solchen wird von einer nur endlichen Anzahl anderer geschnitten. Bei der einfach unendlichen Mannigfaltigkeit der Erzeugenden bedeutet dies also eine einfache Bedingung. Von unseren 11 Geraden wird daher i. A. keine von einer der noch übrigen zehn geschnitten werden; die elf Geraden der Fläche sind i. A. windschief zu einander.

§ 2.

Ein doppelt-unendliches System von $R^4{}_{II}$. 11 einfach-unendliche Systeme von R^3. Die 55 Kegelschnitte der Fläche.

5. Hinter den Geraden der Fläche erhebt sich die Frage nach der Existenz der nächst höheren Kurven, der Kegelschnitte. Zu ihrer Ermittelung führt das folgende allgemeine Verfahren:

Wir denken uns einmal die ∞^2 Flächen 2. Ordnung, welche durch die Doppelkurve D^3 hindurchgehen, mit unserer Fläche zum vollen Schnitt gebracht. Der Gesamtschnitt ist von der Ordnung $2.5 = 10$. Sieht man von D^3, welche als Doppelkurve beim Schneiden doppelt

also als ein Kurvengebilde 6. Ordnung zählt, ab, so verbleibt als weiterer Schnitt noch eine Kurve von der Ordnung 4. Wie ist diese beschaffen?

Im allgemeinen wird eine solche Kurve 4. Ordnung keine Gerade der Fläche als Bestandteil enthalten können, denn diese bilden wegen ihrer zwei Stützpunkte auf D^3 mit D^3 selbst eine Raumkurve R^4_I, durch die doch nur ein Teil der ∞^2 von uns betrachteten Flächen 2. Ordnung hindurchgeht, nämlich die ∞^1, welche sie als Grundkurve ihres Büschels besitzen.

Es bleibt ferner die Möglichkeit, dass sich jene ∞^2 Kurven 4. Ordnung aus zwei Kegelschnitten zusammensetzen. Alsdann müssten diejenigen ∞^1 unter ihnen, welche von Flächen 2. Ordnung des Netzes herrühren, die unsere Fläche überdies einmal berühren, einen Doppelpunkt besitzen, also ein Geradenpaar enthalten; wir kämen so zu ∞^1 Geradenpaaren der Fläche d. i. zu ∞^1 Geraden derselben, während ihre Zahl, wie vorhin bewiesen, doch nur eine endliche ist.

Hiermit ist gezeigt, dass es immer Flächen 2. Ordnung durch D^3 gibt, von deren Restschnittkurven sich weder Geraden noch Kegelschnitte abspalten, die somit unsere Fläche in einer eigentlichen Raumkurve 4. Ordnung schneiden. Wir fragen nun nach der Art derselben.

Eine beliebige Erzeugende irgend einer der ∞^2, durch D^3 gehenden Flächen 2. Ordnung schneidet ja unsere Fläche insgesamt 5 mal. Gehört diese Erzeugende der Schar der die D^3 einmal treffenden an, so tut sie dies zweimal auf D^3 und somit noch dreimal auf dem Restschnitt. Unsere Raumkurve 4. Ordnung hat also unendlich viele Trisekanten und ist demnach eine R^4 II. Art; solche Kurven mögen im folgenden mit R^4_{II} bezeichnet werden.

Wir haben also das Ergebnis:

Alle Flächen 2. Ordnung durch die Doppelkurve D^3 schneiden unsere Fläche noch in einer Raumkurve 4. Ordnung. II. Art. Dieselben bilden ein doppelt unendliches System von Kurven auf unserer Fläche, „ein Kurvennetz“. Durch zwei Punkte der Fläche ist eine

Fläche aus dem Flächennetz 2. Ordnung und somit auch eine R^4_{II} aus dem Kurvennetze, ihr Restschnitt, bestimmt.

6. Von diesen Kurven R^4_{II} mögen einige ihrer wesentlichsten Eigenschaften abgeleitet werden.

Zunächst ermitteln wir, in wie viel Punkten sie die Doppelkurve schneiden.

Dazu greifen wir zwei durch die Doppelkurve D^3 gehende Flächen 2. Ordnung heraus, die dann ausser dieser Kurve noch eine Gerade g gemein haben, die mit D^3 eine zerfallene Raumkurve R^4 I. Art „ R^4_I “ bildet und D^3 daher zweimal trifft. Mithin trifft g unsere Fläche noch in $5-2.2 = 1$ Punkt, oder, wenn wir bei der einen der beiden Flächen 2. Ordnung die zugehörige Restschnittkurve R^4_{II} ins Auge fassen: die von einer der beiden Flächen 2. Ordnung ausgeschnittene R^4_{II} trifft die andere Fläche ausserhalb der ihnen gemeinschaftlichen Kurve D^3 nur noch in einem Punkte und mithin $8 - 1 = 7$mal auf D^3. Und da die betrachtete Kurve R^4_{II} jede Kurve des vorhin gefundenen doppelt unendlichen Systemes sein konnte, haben wir den Satz:

Jede Kurve R^4_{II} unseres doppelt unendlichen Systemes begegnet der Doppelkurve der Fläche siebenmal.

Zugleich ergibt sich, wenn wir auch bei der anderen Fläche 2. Ordnung ihre Restschnittkurve R^4_{II} ins Auge fassen:

Zwei Kurven R^4_{II} des Systemes begegnen einander einmal.

Da von den elf Geraden unserer Fläche i. a. keine einer der ∞^2 durch D^3 gehenden Flächen 2. Ordnung angehört, schneiden sie eine solche Fläche in zwei und nicht mehr Punkten, was in ihren beiden Stützpunkten auf D^3 geschieht. Darum schneiden sie also den weiteren Schnitt der Fläche 2. Ordnung, die von uns betrachteten Kurven R^4_{II} nicht mehr. Also:

Die Kurven R^4_{II} des doppelt unendlichen Systemes treffen keine Gerade der Fläche.

7. Wir spezialisieren nun unsere bisherige Betrachtung, indem wir aus den ∞^2 Flächen 2. Ordnung durch D^3 diejenigen herausgreifen, welche noch eine der elf Geraden der Fläche enthalten. Da diese Geraden D^3 je in zwei Punkten treffen und sich mit ihr zu zerfallenden Raumkurven 4. Ordnung I Art zusammensetzen, ist das so zu stande kommende Flächensystem die Gesamtheit der Flächen von 11 Flächenbüscheln 2. Ordnung.

Sei g eine der 11 Geraden unserer Fläche, gD^3 die Grundkurve eines der 11 Flächenbüschel. Alle Flächen desselben schneiden, wie vorhin allgemein bewiesen, unsere Fläche ausser in D^3 noch in je einer R^4_{II}. Von diesen spaltet sich jetzt durchgehends die Gerade g ab, sodass bei jeder Fläche des Büschels noch ein kubisches Restschnittgebilde verbleibt, welches mit g die Abart einer R^4_{II} bildet, also eine die Gerade g einmal treffende kubische Raumkurve. Daher folgt der Satz:

Die Flächen des Büschels 2. Ordnung, welches die Doppelkurve D^3 sowie eine der elf Geraden g als Grundkurve besitzt, schneiden unsere Fläche noch in je einer kubischen Raumkurve, welche die Gerade g einmal treffen.

Durch einen auf der Fläche angenommenen Punkt geht i. A. eine Fläche des Büschels (D^3, g) und mithin auch eine der kubischen Kurven; die Gesamtheit dieser einfach unendlich vielen Kurven möge wegen dieser Analogie mit einem ebenen Kurvenbüschel als Büschel der kubischen Raumkurven R^3 bezeichnet werden. Die elf Geraden der Fläche liefern elf solcher Büschel; jede Gerade möge als „zugehörige“ oder „Stützgerade“ jeder der in ihrem Kurvenbüschel befindlichen Kurven bezeichnet werden.

8. Wie vorhin bewiesen wird jede Gerade g der Fläche von den zugehörigen Kurven ihres Büschels einmal getroffen. Geschähe dies bei verschiedenen Kurven R_1^3 und R_2^3 desselben in demselben Punkte ihrer Stützgerade g, so hätten

die beiden Flächen 2. Ordnung, durch welche sie bez. ausgeschnitten werden, in diesem Punkte dieselbe Tangentialebene, nämlich die, welche auch Tangentialebene unserer Fläche in diesem Punkte ist; dann müssten aber die beiden Flächen notwendig zusammenfallen und R_1^3 mit R_2^3 identisch werden. Daraus folgt, dass die einzelnen Kurven des zu einer Gerade g gehörigen kubischen Kurvenbüschels dieselbe durchweg in verschiedenen Punkten treffen.

Da eine Kurve R^3 aus einem der elf Büschel mit ihrer Stützgerade eine R^4_{II} des früher betrachteten allgemeinen Systemes bildet, welche, wie bewiesen, D^3 siebenmal trifft, und da ferner die Stützgerade als Gerade der Fläche D^3 davon zweimal trifft, so ergibt sich:

Eine Kurve R^3 aus einem der 11 Büschel muss die Doppelkurve D^3 $7 - 2 = 5$ mal treffen.

Hätten zwei kubische Kurven desselben Büschels einen Punkt gemein, so müssten die sie ausschneidenden Flächen 2. Ordnung identisch sein, d. h. also:

Zwei zu demselben kubischen Kurvenbüschel gehörige Kurven haben keinen Punkt gemeinsam.

Es ergibt sich nun von selbst die Frage, wie oft sich zwei zu verschiedenen Büscheln gehörige kubische Raumkurven schneiden.

Dieselben seien R_1^3 und R_2^3; g_1 bezw. g_2 seien ihre Stützgeraden.

$(R_1^3\ g_1)$ und $(R_2^3\ g_2)$ sind zwei Raumkurven 4. Ordnung II. Art aus dem vorhin betrachteten Netze, welche, wie bewiesen, einen Punkt gemeinsam haben. Nun kann aber weder g_1 die R_2^3 noch g_2 die R_1^3 treffen; denn träfe z. B. g_2 die R_1^3, so hätte sie mit der Fläche 2. Ordnuug, welche D^3, g_1, R_1^3 zum vollen Schnitt mit unsrer Fläche besitzt, mehr als zwei Punkte gemein und gehörte ihr ganz an, sodass der volle Schnitt von der 11. Ordnung würde, was nicht möglich ist. Aus demselben Grunde trifft auch g_1 die R_2^3 nicht; ferner sind g_1 und g_2 als Geraden der Fläche zu einander windschief, sodass der eine Schnittpunkt, welchen

die beiden Kurven (R_1^3, g_1) und (R_2^3 g_2) haben, von R_1^3 und R_2^3 herrühren muss, d. h.: Zwei kubische Kurven aus verschiedenen Büscheln schneiden sich einmal. Zugleich ergab sich der Satz: Eine kubische Raumkurve eines der elf Büschel schneidet nur ihre zugehörige Gerade, die übrigen zehn nicht.

Schliesslich möge noch erwähnt werden, dass eine R^3 eine R^4_{II} des Netzes einmal schneidet. Denn die R^3 bildet ja zusammen mit ihrer Stützgerade auch eine (zerfallende) R^4 des Netzes, welche von einer anderen, allgemeinen R^4 einmal getroffen wird, was, da die letztere keine Gerade der Fläche trifft, nur auf R^3 geschehen kann.

9. Wir gehen jetzt noch einen Schritt weiter und greifen aus unseren elf Büscheln von Flächen 2. Ordnung mit D^3 und einer Gerade g_1 unsrer Fläche als Grundkurve diejenigen Flächen heraus, welche noch eine zweite Gerade g_2 der Fläche enthalten; da ja jede dieser Geraden Doppelsekante der D^3 ist, ist das mit der Hinzunahme eines weiteren bestimmendes Punktes gleichbedeutend; es wird sich also für jede der zehn übrigen Geraden genau eine Fläche 2. Ordnung ergeben; im Ganzen erhalten wir $\frac{11.10}{1.2} = 55$ Flächen 2. Ordnung durch D^3 und zwei Geraden der Fläche. Der Restschnitt einer solchen Fläche ist von der Ordnung zwei, er muss zusammen mit einer der beiden Geraden g_1, g_2, durch welche die Fläche 2. Ordnung hindurch geht, etwa mit g_1, die Abart einer kubischen Raumkurve bilden, da die ausschneidende Fläche 2. Ordnung durch D^3 sowie eine Gerade (g_2) unserer Fläche hindurchgeht. Nr 7; demgemäss ist der fragliche Restschnitt 2. Ordnung ein g_1 einmal treffender Kegelschnitt K. Die zerfallene Kurve 3. Ordnung (Kg_1) gehört mit unter die Kurven des zur Gerade g_2 gehörigen Büschels kubischer Raumkurven; dieselben treffen, wie früher gezeigt, ihre Stützgerade je einmal, insbesondere also auch (Kg_1); da aber g_1 zu g_2 windschief ist, muss der Kegelschnitt K g_2 einmal treffen; er trifft also sowohl g_1 wie g_2 einmal, wodurch

das bisher scheinbar stattfindende ungleichmässige Verhalten von g_1 und g_2 ihm gegenüber sich von selbst behebt.

Wie man sieht, bildet K zusammen mit g_1 und g_2 eine Abart einer Kurve R^4_{II} des früher betrachteten Kurvennetzes. Von diesen Kurven wurde bewiesen, dass sie keine Gerade der Fläche treffen, wofern sie sie nicht ganz enthalten. In unserem Falle darf also $(K\ g_1\ g_2)$ keine der übrigen neun Geraden der Fläche treffen d. h. der Kegelschnitt K begegnet von allen Geraden der Fläche nur den beiden g_1 und g_2.

Wir fassen das bisher Gefundene in dem Satze zusammen: Die 55 Flächen 2. Ordnung, welche sich durch D^3 sowie zwei Geraden unserer Fläche legen lassen, schneiden dieselbe zur Vervollständigung ihres Schnittes noch je in einem Kegelschnitte, der die beiden Geraden, durch welche die betreffende Fläche 2. Ordnung gelegt ist, einmal, die übrigen neun Geraden gar nicht trifft.

Die beiden Geraden, welche ein Kegelschnitt trifft, mögen seine beiden ihm zugehörigen oder auch seine Stützgeraden genannt werden.

Aus ähnlichen wie den bisher angeführten Gründen müsste auch jede Fläche 2. Ordnung durch D^3, welche die Fläche längs einer der elf Geraden berührte, zu einem Kegelschnitt als Restschnitt führen; sehen wir aber zu, ob solche Flächen überhaupt möglich sind: In diesem Falle hätte also die betreffende Fläche 2. Ordnung F^2 in jedem Punkte der Gerade g, längs deren sie F_3^5 berührt, mit dieser eine und dieselbe Berührungsebene; irgend eine Ebene durch g schneidet nun F_3^5 zur Ergänzung des vollen ebenen Schnittes noch in einer ebenen Kurve 4. Ordnung, C^4, welche die Gerade g in vier Punkten trifft, Doppelpunkten des vollen Schnittes 5. Ordnung. Von ihnen rühren zwei, die beiden Stützpunkte von g auf D^3, von der Duplizität dieser Kurve her, während die beiden anderen auf zweimalige Berührung der Ebene (C^4, g) mit unserer Fläche zurückzuführen sind, letzteres freilich nur solange, als die Gerade g der Fläche nicht noch einen weiteren Doppelpunkt enthält. Schliessen wir aber

bis auf weiteres solche zur kubischen Doppelkurve neu hinzutretenden Singularitäten aus, d. h. bleiben wir auf der „allgemeinen Fläche F_3^5“, so ist also jede Ebene durch eine der elf Geraden g Doppelberührungsebene der Fläche; andererseits sind ja aber die Ebenen des Büschels g durchweg einfache Berührungsebenen unserer Fläche 2. Ordnung F^2, jede besitzt genau einen Berührungspunkt mit F^2. Daraus folgt dann sofort, dass F^2 und F_3^5 nicht für alle Punkte von g je dieselbe Berührungsebene haben können. Es gibt somit keine Fläche 2. Ordnung durch D^3, welche unsere Fläche F_3^5 längs einer ihrer Geraden berührt.

Es erhebt sich die Frage, ob es ausser den 55 vorhin gefundenen Kegelschnitten noch weitere auf der Fläche gibt: Sei K irgend ein Kegelschnitt der Fläche; derselbe wird zum vollen ebenen Schnitt 5. Ordnung noch durch eine ebene Kurve 3. Ordnung C^3 ergänzt. Von ihren sechs Schnittpunkten, welche Doppelpunkte des Gesamtschnittes sind, müssen drei, D_1, D_2, D_3, die drei Schnittpunkte der Doppelkurve D^3 mit ihrer Ebene sein. Durch fünf von diesen sechs Schnittpunkten, darunter D_1, D_2, D_3 sowie noch vier auf D^3 befindliche Punkte legen wir eine Fläche 2. Ordnung; sie ist durch diese neun Punkte eindeutig bestimmt. Mit dem Kegelschnitt hat diese Fläche fünf, mit D^3 $3 + 4 = 7$ Punkte gemein und enthält daher beide Kurven; ihr Restschnitt ist mithin von der Ordnung $2.5—2—2.3=2$. Dieses Kurvengebilde 2. Ordnung muss aber nach Früherem zusammen mit dem Kegelschnitt K eine R^4_{II} bilden also entweder aus einem den K einmal treffenden weiteren Kegelschnitt K_1 oder aus zwei den K je einmal treffenden und zu einander windschiefen Geraden bestehen. (Der Grenzfall einer R^4_{II}, wo diese beiden Geraden sich mit einander vereinigen, würde eine durch D^3 gehende, längs dieser Gerade berührende Fläche 2. Ordnung erfordern und ist nach dem vorhin bewiesenen ausgeschlossen.) Zwei einander einmal begegnende Kegelschnitte K und K_1 sind aber auf einer eigentlichen Fläche 2. Ordnung, wie wir sie hier vor uns haben, nicht möglich; die Fläche 2. Ordnung durch D^3 und K schneidet also zwei den K je einmal treffende

Geraden der Fläche aus. Daraus folgt, dass sich jeder Kegelschnitt unserer Fläche auf die anfangs angegebene Weise als Restschnitt einer durch die Doppelkurve D^3 sowie zwei Geraden der Fläche gehende Fläche 2. Ordnung darstellen lässt.

Die Zahl der Kegelschnitte unserer Fläche beträgt also 55.

Das gelegentlich dieser Ableitung gefundene Resultat, dass ein Kegelschnitt die Doppelkurve dreimal trifft, lässt sich auch leicht in der Weise dartun, dass man ihn mit seinen beiden Stützgeraden als eine R^4_{II} des Netzes ansieht.

Da es für die Bestimmung einer Fläche eine einfache Bedingung bedeutet, wenn sie eine gegebene Fläche berühren soll, so gibt es, wie wir bereits gesehen haben, in unserem doppeltunendlichen System von Flächen 2. Ordnung durch D^3 nur eine endliche Anzahl, welche unsere Fläche 5. Ordnung zweimal berühren, deren Restschnittkurve R^4_{II} also zwei Doppelpunkte besitzt und somit in einen Kegelschnitt und dessen zwei Stützgeraden zerfällt. Wegen der endlichen Anzahl von Flächen 2. Ordnung, welche dieses leisten, werden wir also über sie, insbesondere z. B. über die Lage ihrer Berührungspunkte nicht weiter verfügen können; dieselben werden daher beliebig auf unserer Fläche liegen, d. h. aber m. a. W.:

Ein Kegelschnitt unserer Fläche wird von seinen beiden Stützgeraden ausserhalb der Doppelkurve D^3 getroffen.

§ 3.

Lagebeziehungen der Kegelschnitte unter einander sowie zu bereits gefundenen Raumkurven 3. und 4. Ordnung.

10. Wir werden uns jetzt zur Untersuchung zunächst der Lagebeziehungen der Kegelschnitte unter einander.

Seien K und K' zwei Kegelschnitte, deren zugehörige Geradenpaare g_1, g_2 bzw. g'_1, g'_2 von einander verschieden

sind. Nach einem früheren Ergebnis (Nr. 6, Seite 13) haben die beiden aus ihnen gebildeten Raumkurven R^4_{II} $(K\ g_1,\ g_2)$ und $(K'\ g'_1\ g'_2)$ einen Punkt gemein; und da, wie wir wissen, g_1 und g_2 weder K' noch g'_1 oder g'_2 treffen können und analog g'_1 und g'_2 weder K noch g_1 oder g_2, so kann der eine Treffpunkt nur von K und K' herrühren; wir haben also den Satz:

Zwei Kegelschnitte der Fläche, deren zugehörige Geradenpaare keine Gerade gemein haben, schneiden sich in einem Punkte.

Haben die zu zwei Kegelschnitten gehörigen Geradenpaare eine Gerade gemeinsam, wird also z. B. $g_2 \equiv g'_2$, so bilden (Kg_1) und $(K'g'_1)$ zwei Raumkurven R^3 des zu $g_2 \equiv g'_2$ gehörigen Büschels und haben nach einem früheren Ergebnis (Nr. 8, S. 15) keinen Punkt mit einander gemeinsam, also auch nicht ihre Bestandteile, die beiden Kegelschnitte. Es ergibt sich:

Zwei Kegelschnitte der Fläche, deren zugehörige Geradenpaare eine Gerade gemein haben, schneiden sich nicht. Der Vollständigkeit halber möge noch hinzugefügt werden: Zwei Kegelschnitte, deren zugehörige Geradenpaare beide Geraden miteinander gemein haben, schneiden sich in unendlich vielen Punkten, sind identisch.

Von diesen Sätzen gelten auch die Umkehrungen:

Zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Punkt gehören zu verschiedenen Geradenpaaren; denn wären die letzteren nicht verschieden, hätten sie also eine Gerade gemein, so dürften sich die Kegelschnitte nach dem 2. vorhin gewonnenen Satze nicht schneiden, was wider die Voraussetzung ist.

Analog beweist man:

Zwei Kegelschnitte ohne gemeinsamen Punkt gehören zu zwei Geradenpaaren, welche in einer Gerade übereinstimmen. Beide Sätze lassen sich in den einen zusammenfassen: Zwei Kegelschnitte mit $\alpha\ (= 1{,}0)$ gemeinsamen Punkten gehören zu Geradenpaaren, die in $1 - \alpha$ Geraden übereinstimmen.

Nach der Anzahl der Schnittpunkte, in denen ein Kegelschnitt K der Fläche von den übrigen 54 getroffen wird, ergibt sich eine Teilung derselben in zwei Gruppen: einmal und keinmal treffende. Wir ermitteln deren Anzahlen: Ausser den beiden Stützgeraden g_1, g_2 unseres Kegelschnittes gibt es noch neun Geraden auf der Fläche. Letztere kann man auf $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ Weisen zu je zwei znsammenstellen und alle führen nach dem oben Bewiesenen zu Kegelschnitten, die den K einmal schneiden.

Andrerseits kann mann jede der neun übrigen Geraden sowohl mit der einen wie mit der anderen Stützgerade des K zusammenstellen, im ganzen 18 mal und jeder der dabei sich ergebenden Kegelschnitte trifft den K keinmal. Wir erhalten also:

Jeder Kegelschnitt der Fläche wird von 36 anderen einmal, von 18 keinmal, von keinem zweimal getroffen. Folglich gibt es $\frac{55 \cdot 36}{1 \cdot 2} = 990$ Dupel sich 1 mal und $\frac{55 \cdot 18}{1 \cdot 2} = 495$ Dupel sich 0 mal begegnender Kegelschnitte.

11. Greift man irgend zwei Kegelschnitte K und K′ der Fläche heraus, so haben dieselben entweder keinen oder einen gemeinsamen Punkt. Nehmen wir zunächst den erstgenannten Fall vor, wo K und K′ keinen Punkt, ihre Geradenpaare also eine Gerade gemeinschaftlich haben; die übrigen 53 Kegelschnitte der Fläche werden sich zu ihnen so verhalten, dass sie entweder beide in 0 Punkten, oder den einen in 0, den andern in 1 Punkte, oder schliesslich beide in 1 Punkte treffen.

Wir wollen die Zahl der Kegelschnitte aller drei Arten abzählen.

I. Die Stützgeraden von K und K′ seien bzw. g, g_1; g', g'_1; $(g_1 = g'_1)$. Jeder Kegelschnitt, welcher K und K′ in 0 Punkten trifft, muss zu einem Geradenpaar gehören, dessen zwei Geraden n, n′ mit den zu K und K′ gehörigen

Geradenpaaren je eine Gerade gemeinsam haben. Das kann entweder so geschehen, dass eine der zwei Geraden n, n' in $g_1 = g_1'$ fällt, während die andere von g, g', $g_1 = g_1'$ verschieden ist, und das ist auf $11 - 3 = 8$ verschiedene Weisen möglich, oder auch so, dass die eine Gerade mit g, die andere mit g' zusammenfällt, was nur einmal geschehen kann. Wir erhalten also $8 + 1 = 9$ Geradenpaare und somit 9 Kegelschnitte der gewünschten Art. Also:

Ein Dupel sich nicht begegnender Kegelschnitte wird von 9 anderen Kegelschnitten in $0 + 0$ Punkten getroffen[1]).

II. Wir suchen jetzt die Zahl der Kegelschnitte, welche dem einen unserer beiden sich nicht begegnenden Kegelschnitte in keinem, dem anderen in einem Punkte begegnen. Alle diejenigen Kegelschnitte, welche K keinmal, K' einmal begegnen, werden zu Geradenpaaren n, n' gehören, welche mit g und g_1 eine Gerade, mit $g_1 = g_1'$ und g' keine Gerade gemein haben. Das können also nur diejenigen 8 Geradenpaare sein, deren eine Gerade g und deren andere Gerade eine der noch übrigen 8 Geraden unserer Fläche ist. Ebenso erhalten wir 8 Geradenpaare für alle die Kegelschnitte, welche K' in keinem und K in einem Punkte begegnen; insgesamt ergeben sich $8 + 8 = 16$ Kegelschnitte der verlangten Art. Also:

Ein Dupel sich nicht begegnender Kegelschnitte wird von 16 Kegelschnitten in $0 + 1$ Punkten getroffen:

III. Schliesslich bleibt noch eine dritte Art von Kegelschnitten übrig: alle die, welche unsere beiden Kegelschnitte K und K' je einmal treffen: deren Stützgeraden n, n' müssen also von g, $g_1 = g_1'$, g' verschieden sein; man kann dieselben unter den 8 noch übrigen Geraden der Fläche auf $\frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28$ Weisen auswählen. Also:

---

[1]) Man beachte die Teilung dieser 9 Kegelschnitte in zwei Gruppen von 8 und 1.

Ein Dupel sich nicht begegnender Kegelschnitte wird von 28 Kegelschnitten in $1 + 1$ Punkten getroffen.

Da jeder von K und K' verschiedene Kegelschnitt unserer Fläche in einer dieser Arten I, II, III enthalten sein muss, muss deren Summe $9 + 16 + 28$ gleich 53 sein, wie es auch in der Tat der Fall ist.

Wir lösen jetzt die analoge Aufgabe für den Fall, dass die beiden Kegelschnitte des zu Grunde liegenden Dupels, K und K', einen Punkt gemein haben, ihre Stützgeraden g, g_1, g', g'_1 also von einander verschieden sind. Auch hier gibt es drei Arten der übrig bleibenden Kegelschnitte, je nachdem diese K und K' in $0 + 0$, $0 + 1$, $1 + 1$ Punkten treffen.

IV. Jeder Kegelschnitt der ersten Art muss zu einem Geradenpaar n, n' gehören, welches sowohl mit g, g_1 wie mit g', g'_1 eine Gerade gemein hat; man hat also die eine Gerade, n, aus dem einen Paar, die andere, n', aus dem andern Paar zu wählen, was auf vier verschiedene Weisen möglich ist. Also:

Ein Dupel sich einmal begegnender Kegelschnitte wird von 4 Kegelschnitten in $0 + 0$ Punkten getroffen.

Der Nachweis der Zahl der Kegelschnitte in den beiden noch fehlenden Arten V und VI möge wegen der grossen Analogie mit dem Bisherigen unterdrückt werden. Die bezüglichen Sätze lauten:

V. Ein Dupel sich einmal begegnender Kegelschnitte wird von $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$ Kegelschnitten in $0 + 1$ Punkten getroffen.

VI. Ein Dupel sich einmal begegnender Kegelschnitte wird von $\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ Kegelschnitten in $1 + 1$ Punkten getroffen.

Auch hier gilt als Kontrolle, dass die Summe der Kegelschnitte aller drei Arten $(4 + 28 + 21)$ gleich 53 sein muss. Durch Zusammenstellung aller möglichen Kegelschnittdupel mit irgend einem dritten Kegelschnitt unserer Fläche gelangen wir zu allen nur möglichen Kegelschnitttripeln. Dieselben lassen sich naturgemäss in verschiedene Typen

„(ikl)“ sondern, je nach der Beschaffenheit der drei Zahlen i, k, l der Schnittpunkte, in denen sich je zwei der drei Kegelschnitte eines Tripels schneiden; (i, k, l = 0.1). Demnach ergeben sich als einzig möglich die vier Typen von Tripeln: (000), (001), (011), (111).

Jeder einzelne Typus enthält eine bestimmte Anzahl von Kegelschnitttripeln, deren Zahl sich auf Grund des Vorhergehenden leicht herleiten lässt.

Wir erhalten die Tripel des Typus (000) durch Zusammenstellung aller Dupel sich nicht schneidender Kegelschnitte, deren es Früherem zufolge 495 gibt (Nr. 10, S. 21) mit allen den Kegelschnitten, die ein solches in $0 + 0$ Punkten schneiden (nach I 9 Kegelschnitte). Da jedes Tripel auf diese Weise dreimal zu stande kommt, so beträgt die Anzahl der Kegelschnitttripel vom Typus (000) $\frac{495 \cdot 9}{3} = 1485$[1]).

Die Tripel des Typus (001) ergeben sich aus der Zusammenstellung der erwähnten 495 Dupel mit allen sie $(0 + 1)$ mal schneidenden Kegelschnitten; (nach II: 16); jedes reproduziert sich ersichtlich zweimal, sodass die Zahl der Kegelschnitttripel von Typus (001) $\frac{495 \cdot 16}{2} = 3960$ beträgt.

Übrigens erhält man die Zahl dieser Tripel auch aus der Zusammenstellung der 990 Dupel sich einmal begegnender Kegelschnitte (Nr. 10, S. 21) mit allen sie $(0 + 0)$ mal treffenden Kegelschnitten; (nach IV 4); jedes Tripel entsteht hier nur einmal, also ist die Anzahl $990 \cdot 4 = 3960$, wie bereits gefunden.

Analog berechnet man, ebenfalls auf zwei Weisen, die Zahl der Tripel (011) als $495 \cdot 28 = \frac{990 \cdot 28}{2} = 13860$ und die Zahl der Tripel (111) auf nur eine Weise als $\frac{990 \cdot 21}{3} = 6930$.

---

[1]) Sie zerfallen in zwei Gruppen von 1320 und 165, wie aus dem in I Gesagten folgt.

Als zusammenfassende Kontrolle dient der Umstand, dass die Summe der in allen vier Typen enthaltenen Kegelschnitttripel, $1485 + 3960 + 13860 + 6930 = 26235$, die Gesamtzahl aller nur möglichen Kegelschnitttripel also gleich $\frac{55 \cdot 54 \cdot 53}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ sein muss, was durch die Ausrechnung bestätigt wird.

12. Die Verknüpfung dreier Kegelschnitte der Fläche, wie sie bei dem zuletzt betrachteten Tripel (111) statthat, lässt noch eine interessante Erweiterung zu.

Wir gehen dazu von einem Kegelschnitt aus und schreiten fort zu einem zweiten, dritten u. s. w. in der Weise, dass jeder Kegelschnitt nur die beiden ihm in der Reihenfolge vorwärts und rückwärts benachbarten einmal, alle anderen aber keinmal trifft.

Sei K_1 der Ausgangskegelschnitt; er gehöre, wenn wir die 11 Geraden der Fläche der Reihe nach mit 1, 2, 3, .. 11 bezeichnen, etwa zu den Geraden 10 und 11. Der auf ihn folgende Kegelschnitt K_2 soll ihn einmal treffen, muss also zu zwei, von 10 und 11 verschiedenen Geraden gehören, als welche wir etwa 9 und 8 wählen wollen. Der auf K_2 folgende Kegelschnitt K_3 soll K_2 einmal, K_1 keinmal treffen; also müssen seine beiden Stützgeraden von 9 und 8 verschieden sein, mit dem Paar 10, 11 aber in einer Gerade übereinstimmen; sei z. B. 10 diese gemeinsame Gerade, während die andere zwar verschieden von 11, 9, 8 aber sonst beliebig unter den noch übrigen sieben Geraden 1, .. 7 gewählt werden darf; sie sei die Gerade 7.

Wir haben also bisher erhalten

K_1 gehörig zu 10 und 11
K_2 „ „ 9 „ 8
K_3 „ „ 7 „ 10.

Die beiden Stützgeraden des auf K_3 folgenden und diesen einmal treffenden Kegelschnittes K_4 müssen einerseits von 7 und 10 verschieden sein, andererseits sich unter die beiden Paare 10, 11 und 9, 8 verteilen, damit K_4 den K_3 treffe, gegen K_1 und K_2 aber windschief sei. Da die Gerade 10 durch die erste Forderung ausgeschlossen ist, muss die

eine der beiden Stützgeraden von K_4 die Gerade 11 sein, die andere eine der zwei Geraden 9 oder 8, etwa 8. Also: K_4 gehört zu 11 und 8.

Aus denselben Gründen müssen die beiden Stützgeraden des nun folgenden Kegelschnittes K_5 von 11 und 8 verschieden sein, andererseits aber sich auf die Paare 10, 11; 9, 8; 7, 10 verteilen, was ersichtlich allein von 9 und 10 erfüllt wird. Also: K_5 gehört zu 9 und 10.

Die Stützgeraden des folgenden Kegelschnittes K_6 dürfen weder 9 noch 10 sein, müssen sich aber auf die Paare 11, 8; 7, 10; 9, 8; 10, 11 verteilen bezw. unter Fortlassung der unzulässigen auf 11, 8; 7; 8; 11. Nun ist es aber nicht möglich, zwei Geraden zu finden, die mit jeder der Gruppen 11, 8; 7; 8; 11 eine Gerade gemein haben, und es folgt daraus, dass wir an dieser Stelle die Forderung der Windschiefheit rücksichtlich eines der vorangehenden Kegelschnitte K_4, K_3, K_2, K_1 aufgeben müssen. Besonders interessant ist nun der Fall, wo wir die beiden Stützgeraden des K_6 mit den Geraden 7 und 8 zusammenfallen lassen, wobei dann K_6 den Ausgangskegelschnitt K_1 trifft.

Wir gelangen dadurch mit K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 zu einem Kegelschnittsextupel von der Beschaffenheit, dass jeder Kegelschnitt die beiden ihm in der Reihenfolge benachbarten je einmal, die übrigen drei gar nicht trifft; als Nachbarn von K_6 gelten dabei K_5 und K_1.

Sechs solche Kegelschnitte sind also wie die Glieder einer geschlossenen Kette mit einander verbunden und mögen daher in ihrer Gesamtheit als „sechsgliedrige geschlossene Kegelschnittskette“ bezeichnet werden.

Die Frage nach der Anzahl dieser Kegelschnittsketten auf unserer Fläche erledigt sich durch eine Betrachtung ihrer Entstehungsweise:

Das Ausgangspaar der beiden Geraden 10, 11 hätten wir auf $\frac{11.10}{1.2}$-Weisen wählen können; das folgende Paar 9, 8 kann beliebig aus den neun noch übrig bleibenden ge-

bildet werden auf $\frac{9.8}{1.2}$ Weisen. Von den beiden Geraden des Kegelschnittes K_3 musste die eine mit 10 oder 11 zusammenfallen, was zwei Möglichkeiten der Auswahl gibt, die andere aber beliebig unter den noch übrigen Geraden 1, . . . 7 ausgewählt werden, was 7 Möglichkeiten gibt.

Von den beiden Stützgeraden des K_4 musste die eine die Gerade 11 sein, die andere konnte auf 2 Weisen unter 9 und 8 gewählt werden. Die beiden Stützgeraden des K_5 waren dann fest bestimmt, ebenso die von K_6.

Im ganzen hatten wir also $\frac{11.10}{1.2} \cdot \frac{9.8}{1.2} 2.7.2$ Möglichkeiten der Auswahl d. h. Möglichkeiten von Kettenbildungen. Dabei reproduziert sich allerdings jede Kette mehrfach: denn erstens kann man jeden ihrer sechs Kegelschnitte als Ausgangskegelschnitt zu ihrer Herstellung verwenden und zweitens nach erfolgter Wahl von ihm aus die Kette in der einen oder anderen Richtung bilden. Die Zahl der Reproduktionen einer Kette beträgt also 6.2 und wir erhalten somit als deren Anzahl:

$$\frac{11.10}{1.2} \cdot \frac{9.8}{1.2} . 2.7.2 . \frac{1}{2.6} = 4620.$$

Also:

Es gibt 4620 sechsgliedrige geschlossene Kegelschnittsketten auf unserer Fläche.

Aus der soeben vorgenommenen Abzählung folgt, dass jeder Kegelschnitt der Fläche an $\frac{9.8}{1.2} . 2.7.2 \frac{1}{2} = 504$ solcher Ketten als ein Glied teil hat.

Als Kontrolle ergibt sich dann, dass $55.504 = 6.4620$ sein muss, was durch die Ausrechnung bestätigt wird.

---

13. Nach diesen Erörterungen über Lagebeziehungen zwischen Kegelschnitten untersuchen wir noch kurz das Verhalten dieser Kurven gegenüber den Raumkurven R^4_{II} des früher gefundenen Netzes sowie den kubischen Raumkurven der 11 Büschel.

Liegt ein Kegelschnitt und eine Raumkurve R^4_{II} des Netzes vor, so denken wir uns den ersteren durch seine beiden Stützgeraden gleichfalls zu einer (zerfallenen) R^4_{II} ergänzt. Beide Kurven dieser Art haben, wie wir wissen, einen Schnittpunkt (Nr. 6 S. 13), und da die allgemeine R^4_{II} keine Gerade der Fläche (S. 14) also keine der beiden Stützgeraden trifft, muss dieser Treffpunkt auf den Kegelschnitt fallen. Also:

Eine beliebige Kurve R^4_{II} des Netzes schneidet jeden Kegelschnitt einmal.

Zerfällt insbesondere die R^4_{II} in eine kubische Raumkurve R^3 und deren Stützgerade g, welche von den beiden Stützgeraden des Kegelschnittes K (g_1, g_2) verschieden ist und also weder K noch g_1, g_2 trifft, so folgt:

Eine R^3 schneidet einen Kegelschnitt, dessen zwei Stützgeraden von der ihr zugehörigen Gerade verschieden sind, in einem Punkte.

Zerfällt hingegen die R^4_{II} in eine kubische Raumkurve R^3 und deren Stützgerade g, welch letzere mit einer der beiden Stützgeraden g_1, g_2 des Kegelschnittes, etwa mit g_1, zusammenfällt, so bildet Kg_2 auch eine zu g_1 gehörige kubische Kurve und hat darum, wie früher gefunden, mit R^3 keinen Punkt gemeinsam. (Nr. 8, S. 15.). Wir erhalten also den Satz:

Eine R^3 schneidet einen Kegelschnitt, von dessen zwei Stützgeraden eine mit der zur R^3 gehörigen zusammenfällt, in keinem Punkte.

Geringe Umformungen der beiden letzten Sätze liefern die weiteren:

Ein Kegelschnitt unserer Fläche wird von den kubischen Raumkurven aus neun der elf Büschel einmal, von denen aus den beiden anderen Büscheln keinmal getroffen, je nachdem die Stützgerade einer kubischen Kurve von den beiden des Kegelschnittes verschieden ist oder nicht.

Oder:

Eine bestimmte R^3 aus einem der elf Büschel trifft 45 Kegelschnitte der Fläche 1mal, 10: 0mal.

§ 4.

Projektive Erzeugungsweise der Fläche.

14. Die bisher gewonnenen Resultate setzen uns in Stand, eine projektive Erzeugungsweise unserer Fläche herzuleiten.

Wir denken uns durch die Doppelkurve D^3 sowie durch eine Raumkurve 3. Ordnung R^3 eines der 11 Büschel eine Fläche 3. Ordnung F^3 gelegt. Da für eine solche Fläche eine Raumkurve 3. Ordnung, welche ihr angehören soll, die Bedeutung von 10 bestimmenden Punkten hat[1]) und R^3 sich mit D^3 in fünf Punkten trifft, so haben beide Kurven R^3 und D^3 zusammen die Bedeutung von $10 + 10 - 5 = 15$ vorgegebenen Punkten. Zur endgültigen Bestimmung fehlen also noch 4 Punkte; wir werden ∞^4 durch D^3 und R^3 gehende Flächen 3. Ordnung erhalten.

Der Restschnitt von F^3 mit unserer Fläche wird ein räumliches Kurvengebilde der Ordnung $15 - 6 - 3 = 6$ sein, deren wir durch die ∞^4 Flächen F^3 ∞^4 erhalten.

4 Punkte unserer Fläche $F^5{}_3$ bestimmen i. A. eindeutig eine Fläche 3. Ordnung F^3 und somit eines dieser Kurvengebilde 6. Ordnung.

Die beiden Kurven D^3 und R^3 werden von der Gerade g, der Stützgerade von R^3, in zusammen drei, von den übrigen zehn Geraden der Fläche $F_3{}^5$ in zwei Punkten geschnitten. Wählen wir also von den vier noch verbleibenden Bestimmungspunkten für F^3 keinen weiteren auf einer der elf Geraden, so wird i. a. die dadurch bestimmte Fläche F^3 keine dieser Geraden enthalten, m. a. W. von unserem räumlichen Kurvengebilde 6. Ordnung wird sich bei beliebiger Wahl der kubischen Fläche keine Gerade abspalten; noch viel weniger also ein Dupel.

Da ferner von den 55 Kegelschnitten unserer Fläche $F_3{}^5$ 45 das Kurvengebilde (D^3, R^3) $3+1=4$ mal, 10 $3+0=3$mal treffen, so wird bei beliebiger Wahl der vier noch übrigen Bestimmungspunkte auch keiner der Kegel-

[1]) Sturm, Flächen 3. Ordnung. S. 232.

schnitte unserer Fläche einer kubischen Fläche durch D^3 und R^3 angehören; von unserer Kurve 6. Ordnung wird sich also bei beliebiger Wahl von F^3 auch kein Kegelschnitt abspalten können.

Es bleibt noch die Möglichkeit, dass die ∞^4 in Frage stehenden Kurvengebilde 6. Ordnung vielleicht der Inbegriff je zweier kubischer Raumkurven wären; von der Unrichtigkeit dieser Annahme überzeugt man sich aber leicht, wenn man sich einmal eine ganz spezielle der durch D^3, R^3 gehenden Flächen F^3 herausgegriffen denkt: diejenige, welche sich zusammensetzt aus der durch D^3, R^3 gehenden Fläche 2. Ordnung und einer beliebigen Ebene des Raumes. Ihr Restschnitt 6. Ordnung ist nichts anderes als die Gerade g und die Schnittkurve C^5 dieser Ebene, welche von g einmal getroffen wird. Das Aggregat dieser zwei Kurven lässt sich aber nicht als Abart eines Aggregates zweier kubischen Raumkurven auffassen, wie es doch im speziellen Falle immer noch sein müsste. Damit kommen wir zu dem Ergebnis:

Eine durch die Doppelkurve D^3 und eine kubische Raumkurve R^3 eines der elf Büschel gehende Fläche 3. Ordnung F^3 schneidet bei beliebiger Auswahl unsere Fläche 5. Ordnung F_3^5 noch in einer allgemeinen Raumkurve 6. Ordnung; sie möge zur Abkürzung mit R^6 bezeichnet werden.

Es erhebt sich die Frage, welcher Art die hier gefundene Raumkurve ist. Die Antwort hierauf ergibt sich aus ihrem Verhalten zu den 27 Geraden der Fläche F^3, auf der sie verläuft. Dazu betrachten wir zunächst das Verhalten der 27 Geraden gegenüber den beiden ebenfalls auf F^3 gelegenen kubischen Raumkurven D^3 und R^3.

Wegen ihrer fünf Begegnungspunkte haben diese beiden für eine durch sie zu legende Fläche 2. Ordnung die Bedeutung von $7+7-5=9$ Bestimmungspunkten, bestimmen sie also eindeutig und bilden deren vollen Schnitt 6. Ordnung mit unserer F^3. Daraus folgt, dass jede der 27 Geraden von F^3 den beiden Kurven D^3 und R^3 zusammen in

genau zwei Punkten begegnen muss, ihren Begegnungspunkten mit F^2.

Andererseits gilt, dass irgend eine auf einer kubischen Fläche gelegene kubische Raumkurve von 6 Geraden derselben zweimal, von 15 einmal, von 6 keinmal getroffen wird. Daraus folgt also in Anwendung auf unseren Fall, dass von den 27 Geraden der Fläche F^3 6 die Kurve D^3 keinmal, die Kurve R^3 aber zweimal treffen, 15 die D^3 einmal, desgleichen die R^3 einmal, 6 die D^3 keinmal die R^3 zweimal. Und da diese 27 Geraden, weil nicht auf der Fläche $F_3{}^5$ gelegen dieselbe insgesamt fünfmal treffen, was ausserhalb D^3 und R^3 nur noch auf dem Restschnitt R^6 geschehen kann, so folgt:

Von den 27 Geraden der Fläche F^3 treffen 6 die Restschnittkurve R^6 $5-2.2=1$ mal, 15 Geraden $5-1.2-1.1=$ 2mal, 6 Geraden $5-2.1=3$mal. Durch dieses Verhalten zu den Geraden der Fläche F^3 ist unsere Kurve 6. Ordnung R^6 als die vom Geschlecht 3 charakterisiert[1]), eine Kurve von derselben Art, wie sie sich ergeben, wenn man zwei Flächen 3. Ordnung mit gemeinsamer kubischer Raumkurve zum vollen Schnitt bringt[2]). Der Rang einer solchen Kurve (Ordnung ihrer Tangentenfläche) ist 16[3]), weswegen sie zur Unterscheidung von den übrigen Kurven R^6 mit R^6_{16} bezeichnet werden möge. Durch eine Kurve R^6_{16} gehen ∞^3 Flächen dritter Ordnung, oder, was dasselbe ist, für die Bestimmung einer kubischen Fläche haben diese Kurven die Bedeutung von $19 - 3 = 16$ Punkten (Sturm, Flächen 3. Ordnung, S. 232.)

Wir untersuchen weiterhin noch, wie oft die Restschnittkurve R^6_{16} einer durch D^3 und R^3 gehenden kubischen Fläche F^3 der Doppelkurve D^3 unserer Fläche $F_3{}^5$ begegnet:

Alle von R^3 verschiedenen Raumkurven 3. Ordnung $R^{3\prime}$ des zu g gehörigen Büschels treffen die durch R^3 und D^3 gehende Fläche F^3 neunmal; von diesen neun Treffpunkten

[1]) Sturm, Math. Ann. Bd. 21. S. 494 Tabelle $n=6;5$).

[2]) Ebenda S. 497.

[3]) Sturm, Flächen 3. Ordnung S. 203.

liegen fünf auf D^3 und keiner auf R^3 (denn zwei kubische Kurven aus demselben Büschel treffen sich ja nicht; No. 8. S. 15.), sodass die noch fehlenden vier Treffpunkte der Kurven $R^{3\prime}$ auf dem Restschnitt R^6_{16} liegen müssen. (Man könnte bereits hier aus Gründen der Kontinuität schliessen, dass dann auch R^3 die R^6_{16} in vier Punkten trifft.) Legen wir nun durch irgend eine der Kurven $R^{3\prime}$ und D^3 die Fläche 2. Ordnung, deren Restschnitt g sein muss, so wird diese von R^6_{16} in $2.6 = 12$ Punkten getroffen; von diesen liegen vier Punkte, wie soeben gezeigt, auf $R^{3\prime}$; auf g aber kann keiner liegen; denn sonst hätte die Fläche 3. Ordnung F^3, welche die R^6_{16} ausschneidet, mehr als drei Punkte mit g gemein und enthielte sie ganz, was, wie wir wissen i. a. nicht der Fall ist. Mithin müssen die noch verbleibenden acht Schnittpunkte von R^6_{16} mit jener Fläche 2. Ordnung auf D^3 zu liegen kommen.

Also schneidet unsere Kurve R^6_{16}, und so jede Restschnittkurve einer durch D^3 und R^3 gehenden kubischen Fläche die Doppelkurve D^3 achtmal.

Da andererseits R^6_{16} die durch D^3, R^3, g gehende Fläche 2. Ordnung zwölfmal schneiden muss, und dies achtmal auf D^3, keinmal auf g geschieht, müssen die noch fehlenden vier Begegnungspunkte auf R^3 liegen. R^6_{16} schneidet also alle kubischen Kurven des Büschels, welchem R^3 angehört, viermal.

Wegen ihrer acht Begegnungspunkte haben D^3 und R^3 für eine durch sie zu legende kubische Fläche die Bedeutung von $16 + 10 - 8 = 18$ Bestimmungspunkten, d. h. es geht ein ganzer Büschel von Flächen 3. Ordnung durch diese beiden Kurven, sie bilden die zerfallene Grundkurve 9. Ordnung 36. Ranges eines Flächenbüschels 3. Ordnung.

Die Flächen desselben schneiden unsere Fläche 5. Ordnung F_3^5 ausser in D^3, R^6 noch in einem Kurvengebilde der Ordnung $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 6 = 3$, von dem sich analog früheren Fällen nicht durchweg Geraden oder Kegelschnitte der Fläche abspalten können und das daher i. A. eine kubische Raumkurve ist. $R^{3\prime\prime}$ sei eine solche, F^3_x die Fläche

des Büschels, von der sie ausgeschnitten wird. Wir wollen sehen, ob $R^{3\prime\prime}$ etwa zu den uns schon von früher her bekannten kubischen Kurven zählt.

Die Gerade g schneidet F^3_x in drei Punkten; davon liegen zwei auf D^3 (ihre Stützpunkte), hingegen keiner, wie wir gesehen haben, auf R^6, mithin der dritte auf dem Restschnitt $R^{3\prime\prime}$. Also $R^{3\prime\prime}$ trifft die Gerade g unserer Fläche einmal.

Andererseits trifft $R^{3\prime\prime}$ die durch D^3,g und eine der zu g gehörigen kubischen Kurven $R^{3\prime}$ gelegte Fläche 2. Ordnung insgesamt 6 mal; die sechs Schnittpunkte müssen sich auf D^3, g, $R^{3\prime}$ verteilen; da, wie soeben gefunden, g von $R^{3\prime\prime}$ einmal getroffen wird, müssen $R^{3\prime}$ und D^3 von ihr zusammen fünfmal getroffen werden. $R^{3\prime}$ trifft aber $R_3{}''$ nicht, da $R^{3\prime}$ ja F^3_x in 9 Punkten trifft und diese durch ihre $4 + 5$ Schnittpunkte auf R^6 und D^3 schon erschöpft sind. Also trifft $R^{3\prime\prime}$ die D^3 in 5 Punkten, die g aber, wie bereits gefunden, in einem Punkte, ist also, wie die eine durch D^3, $R^{3\prime\prime}$, g hindurchgehende Fläche 2. Ordnung lehrt, nichts anderes als eine der zur Gerade g gehörigen Kurven des Büschels.

Daraus folgt als Ergebnis:

Legt man durch die Doppelkurve D^3 unserer Fläche und eine kubische Raumkurve R^3 aus dem zu einer der elf Geraden g gehörigen Büschel eine Fläche 3. Ordnung, so schneidet dieselbe unsere Fläche noch in einer Raumkurve 6. Ordnung 16. Ranges, welche zusammen mit der Doppelkurve D^3 die Grundkurve R^9 eines Flächenbüschels 3 Ordnung bildet. Die einfach unendlich vielen Flächen dieses Büschels schneiden unsere Fläche noch in ∞^1 kubischen Raumkurven, welche diejenigen des zu g gehörigen Büschels sind.

Oder unter Veränderung der Betrachtungsweise: Wir gelangen von irgend einer R^3 eines Büschels ausgehend mit Hilfe der ∞^4 Flächen 3. Ordnung durch R^3, D^3 zu ∞^4 Kurven R^6_{16} und können von jeder der

letztgenannten Kurven mit Hilfe einer geeigneten Fläche 3. Ordnung durch R^6, D^3 zu jeder beliebigen anderen Kurve des Ausgangsbüschels zurückkehren. Das heisst aber mit anderen Worten;

Die vierfach unendlichen Systeme von Kurven R^6_{16}, wie wir sie uns zu jeder Kurve eines Büschels in der angegebenen Weise herstellen können, sind für die ∞^1 kubischen Kurven eines und desselben Büschels identisch.

Wir erhalten bei unseren 11 kubischen Büscheln 11 solcher vierfach unendlichen Systeme, im ganzen also auch nur ∞^4 Raumkurven R^6_{16}.

15. Greifen wir aus den ∞^4 Raumkurven R^6_{16} unserer Fläche eine beliebig heraus, so haben die Flächen 3. Ordnung des Büschels mit R^6_{16}, D^3 als Grundkurve zu Restschnitten die kubischen Raumkurven des zu einer Gerade g der Fläche gehörigen Büschels, die ja aber andererseits auch die Restschnitte der Flächen 2. Ordnung des Büschels mit g, D^3 als Grundkurve sind. So geraten die beiden Flächenbüschel in eineindeutige d. i. projektive Beziehung mit solchen Flächen als entsprechenden, welche dieselbe kubische Kurve als Restschnitt besitzen. Indem mit diesen veränderlichen Raumkurven 3. Ordnung sowie der festen D^3 der jeweilige volle Schnitt 6. Ordnung zweier sich entsprechender Flächen erschöpft ist, ergibt sich unsere Fläche F^5_3 als Erzeugnis der beiden Flächenbüschel 2. und 3. Ordnung. Und da man von jeder der ∞^4 Kurven R^6_{16} ausgehen kann, lässt sich die Fläche ∞^4 mal auf diese Weise erzeugen. Also:

Jede Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve lässt sich ∞^4 mal erzeugen mit Hilfe zweier projektiver Flächenbüschel 2. und 3. Ordnung, deren Grundkurven 4. bzw. 9. Ordnung eine kubische Raumkurve gemein haben.

Andererseits gilt aber auch:

Irgend zwei zu einander projektive Flächenbüschel 2. und 3. Ordnung, deren Grundkurven 4. bzw. 9. Ordnung eine kubische Raumkurve gemein

haben, erzeugen stets eine Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve.

Nehmen wir eine beliebige Gerade des Raumes und stellen uns eine Korrespondenz her mit solchen Punkten als entsprechenden, die von in der Projektivität sich entsprechenden Flächen eingeschnitten werden; wir erhalten eine Korrespondenz (2,3) mit fünf Koïnzidenzelementen d. h. Punkten, in denen sich eine Fläche 2. Ordnung mit der ihr entsprechenden Fläche 3. Ordnung schneidet; das sind gerade die Punkte der erzeugten Fläche; und da auf jeder Gerade des Raumes fünf liegen, ist die Fläche 5. Ordnung.

Auf ihr liegt sicher die den Grundkurven der beiden Flächenbüschel gemeinsame kubische Raumkurve, denn in jedem ihrer Punkte schneidet eine Fläche des einen Büschels die ihr entsprechende im anderen; von der Vielfachheit dieser Kurve auf der erzeugten Fläche überzeugt man sich mit Hilfe irgend einer sie in einem ihrer Punkte S treffenden Gerade s. Da es sich um die ausserhalb S gelegenen Punkte der erzeugten Fläche handelt, sehen wir bei Aufstellung der Korrespondenz von S ab, wodurch sich dieselbe ersichtlich auf eine (1,2) reduziert: diese hat drei Koïnzidenzen m. a. W. es gibt nur drei ausserhalb S gelegene Punkte der Fläche auf s, womit S und so jeder Punkt der kubischen Kurve als Doppelpunkt, diese selbst also als Doppelkurve der erzeugten Fläche erwiesen ist.

§ 5.

Mannigfaltigkeitsbetrachtungen.

16. Auf Grund der vorangehenden Erzeugungsweise ist es leicht, die Mannigfaltigkeit unserer Fläche F^5_3 festzustellen:

Zuerst möge die Mannigfaltigkeit der Flächenbüschel 3. Ordnung ermittelt werden, deren Grundkurve 9. Ordnung in eine kubische Kurve D^3 und eine R^6_{16} zerfällt. Für eine

zu bestimmende Fläche 3. Ordnung bedeutet es bekanntlich zehn einfache Bedingungen, wenn sie eine gegebene kubische Raumkurve D^3 enthalten soll; von den ∞^{19} Flächen 3. Ordnung werden dies also $\infty^{19-10} = \infty^9$ leisten. Dieselben lassen sich auf $\infty^{9+9} = \infty^{18}$ Weisen zu je zwei zusammenstellen und schneiden sich dann ausser in der kubischen Kurve D^3 noch in einer Kurve 6. Ordnung R^6_{16} (Sturm, Flächen 3. Ordnung S. 203.); zwei dieser ∞^{18} Flächendupel können also als Konstituenten für ein Flächenbüschel 3. Ordnung dienen, dessen Grundkurve in der bezeichneten Art zerfällt; jedes solche Flächenbüschel kann dabei freilich aus irgend zwei seiner ∞^1 Flächen hergestellt werden, kommt also ∞^2 mal zustande. Es gibt also nur $\infty^{18-2} = \infty^{16}$ Flächenbüschel 3. Ordnung, deren Grundkurve aus einer festen kubischen Kurve D^3 und irgend einer sie ergänzenden R^6_{16} besteht.

Lassen wir jetzt noch D^3 alle ∞^{12} kubischen Raumkurven durchlaufen, so erhalten wir sämtliche Flächenbüschel 3. Ordnung dieser Art, insgesamt $\infty^{16+12} = \infty^{28}$.

Ist ein bestimmtes Büschel herausgegriffen, so hat man noch die Grundkurve des Flächenbüschels 2. Ordnung festzulegen. Von ihr bildet D^3 den einen Bestandteil und ist bereits gewählt, sodass man nur noch die Auswahl unter den ∞^2 Doppelsekanten derselben hat. Sind dann die beiden Flächenbüschel 3. und 2. Ordnung bestimmt gewählt, so muss zwischen ihnen eine projektive Beziehung hergestellt werden, was bekanntlich auf ∞^3 Weisen möglich ist.

Wir erhalten darnach also insgesamt ∞^{28+2+3} projektiv auf einander bezogene Flächenbüschel 2. und 3. Ordnung, deren Grundkurven eine kubische Raumkurve D^3 gemein haben. Jedesmal ist eine Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve das Erzeugnis. Andrerseits wissen wir aber, dass jede Fläche dieser Art ∞^4 mal in dieser Weise zustande kommt (Nr. 15. S 34.). Es folgt:

Es gibt $\infty^{28+2+3-4} = \infty^{29}$ Flächen 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve.

17. Auf einem ganz anderen Wege gelangt man zu einer Bestätigung dieses Ergebnisses:

Zwei beliebige Ebenen des Raumes, ε_1 und ε_2, schneiden irgend eine Fläche F_3^5 in zwei ebenen Kurven 5. Ordnung mit drei Doppelpunkten, C_1^5 bezw. C_2^5, die einander auf der Schnittlinie e_{12} ihrer Ebenen in fünf Punkten begegnen.

Umgekehrt ist aber auch durch zwei solche ebenen Kurven 5. Ordnung C_1^5 und C_2^5 mit drei Doppelpunkten, die einander in fünf Punkten der Schnittlinie ihrer beiden Ebenen begegnen, eine Fläche F_3^5 eindeutig bestimmt: denn zunächst erhält man in den zweimal drei Doppelpunkten der beiden Kurven C_1^5 und C_2^5 die zweimal drei Schnittpunkte der Doppelkurve D^3 mit ε_1 und ε_2, also sechs Punkte der kubischen Kurve D^3 und damit dann die ganze Kurve D^3.

Aus D^3, C_1^5, C_2^5 ergeben sich die 11 Geraden der zu bestimmenden Fläche F_3^5 als Sekanten von C_1^5 und C_2^5 und Doppelsekanten von D^3 (mit getrennten Stützpunkten).

Schneidet man schliesslich die bisher erhaltenen Kurvengebilde mit irgend einer Ebene des Raumes, so sind darin bekannt als Punkte der gesuchten Fläche bezw. dieses ihres ebenen Schnittes: die drei Schnittpunkte mit D^3, Doppelpunkte des ebenen Schnittes, die 2.5 Schnittpnnkte mit C_1^5 und C_2^5 und die elf Schnittpunkte mit den elf Geraden. Zur Bestimmung des ebenen Schnittes sind sie also insgesamt äquivalent $3.3 + 2.5 + 11 = 30$ bestimmenden Punkten, sodass wir von der ebenen Schnittkurve mehr Punkte besitzen, als zu ihrer Bestimmung erforderlich wären[1]).

Auf diese Weise können wir uns also beliebig viele Punkte der gesuchten Fläche verschaffen.

Wir benützen die hier gegebene Herstellung einer Fläche F_3^5 nun auch zur Ableitung ihrer Mannigfaltigkeit:

Ebene Kurven 5. Ordnung gibt es in fester Ebene $\infty^{1/2\,5(5+3)} = \infty^{20}$, unter ihnen $\infty^{20-3} = \infty^{17}$, welche die drei einfachen Bedingungen erfüllen, drei Doppelpunkte zu

---

[1]) Dass die zu konstruierende Kurve 5. Ordnung dadurch nicht überbestimmt ist, erkennt man, wenn man von den 11 Geraden nur eine benützt und wie angegeben die ebenen Schnittkurven konstruiert. Auf der durch sie zustande kommenden Fläche liegen dann auch die übrigen 10 Geraden wegen 6 gemeinsamer Punkte.

besitzen, in allen ∞^3 Ebenen des Raumes also insgesamt $\infty^{17+3} = \infty^{20}$ dieser Art. Sie lassen sich auf $\infty^{20-20} = \infty^{10}$ Weisen zu je zwei zusammenstellen, aber nur $\infty^{40-5} = \infty^{35}$ werden die fünf einfachen Bedingungen erfüllen, sich in denselben fünf Punkten der Schnittlinie ihrer Ebenen zu begegnen. Und da, wie gezeigt, jedes solche Kurvenpaar zu einer Fläche F_3^5 führt, gibt es zunächst scheinbar ∞^{35}; jede einzelne Fläche reproduziert sich dabei aber durch die $\infty^3 . \infty^3$ Dupel ebener Schnittkurven insgesamt ∞^6mal, wodurch sich die Gesamtheit der Flächen F_3^5 wiederum als $\infty^{35-6} = \infty^{29}$ ergibt.

Da es für eine Fläche eine einfache Bedingung bedeutet, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, so wird durch 29 Punkte eine endliche Anzahl von Flächen F_3^5 bestimmt sein. Denkt man sich die Punkte im besonderen zu 17 und 12 in zwei Ebenen ε_1 und ε_2 verteilt, so ergeben sich eine ganze Anzahl von Kurvenpaaren (C_1^5, C_2^5) der oben gekennzeichneten Art, welche diese Punkte enthalten, denn durch 17 Punkte gibt es mehr als eine Kurve 5. Ordnung mit drei Doppelpunkten. Daraus folgt aber jedenfalls das negative Ergebnis, dass sich durch 29 Punkte eine Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve nicht eindeutig bestimmen lässt.

§ 6.

Ebene Kurven 3., 4. und 5. Ordnung. Die dreifachen Berührungsebenen der Fläche. Abbildung der Fläche auf eine Ebene.

18. Nachdem im früheren die Geraden und Kegelschnitte der Fläche eingehender untersucht worden sind, schreiten wir jetzt fort zur Aufsuchung und Betrachtung ebener Kurven von höherer als der 2. Ordnung.

Jede etwa auf unserer Fläche verlaufende ebene Kurve 3. Ordnung C^3 erfordert zur Vervollständigung ihres Schnittes ein ebenes Kurvengebilde 2. Ordnung, welches, da es ja kein

Geradenpaar sein kann, ein Kegelschnitt sein muss. Und umgekehrt erfordert ein Kegelschnitt als Ergänzung zu einer Kurve 5. Ordnung eine ebene Kurve 3. Ordnung. Daraus folgt, dass es, auf unserer Fläche F_3^5 55 ebene Kurven 3. Ordnung gibt, die Ergänzungskurven für je einen der Kegelschnitte.

Zwei so zusammengehörige Kurven C^3 und K haben sechs Schnittpunkte, Doppelpunkte des vollen ebenen Schnittes; von ihnen sind drei, D_1, D_2, D_3 die drei Schnittpunkte unserer Doppelkurve D^3 mit ihrer Ebene, während die übrigen drei, welche mit S_1, S_2, S_3 bezeichnet werden mögen, mangels weiterer Singularitäten unserer Fläche F_3^5 Berührungspunkte der Ebene C^3K mit der Fläche sind.

Wir erhalten also in den 55 Ebenen der Kegelschnitte und sie ergänzenden Kurven 3. Ordnung einen (ersten) Typus dreifacher Berührungsebenen.

Ein voller ebener Schnitt 5. Ordnung wie z. B. C^3K wird von allen elf Geraden unserer Fläche getroffen, darunter der Kegelschnitt K, wie wir wissen, von zwei, seinen beiden Stützgeraden, g_1 und g_2. Diese beiden Geraden können aber den K im Falle einer allgemeinen Fläche F_3^5 d. h. einer solchen, welche ausser D^3 keine weiteren Singularitäten besitzt, nicht in einem seiner sechs Begegnungspunkte mit der ihn ergänzenden C^3 treffen; zunächst nicht in den Punkten D_1, D_2, D_3 der Doppelkurve, wie früher (Nr. 9 S. 19) gefunden worden ist.

Aber auch in S_1, S_2, S_3 kann K bezw. C^3 nicht von g_1 oder g_2 getroffen werden. Denn diese drei Punkte sind ja Berührungspunkte der Ebene C^3K mit unserer Fläche, und eine Gerade der Fläche, welche durch einen von ihnen hindurchginge, müsste, wie man leicht sieht, ganz in die Berührungsebene dieses Punktes fallen (wofern derselbe kein singulärer Punkt ist). Ein Kegelschnitt K wird also von seinen beiden Stützgeraden in Punkten getroffen, die nicht zugleich Punkte der ihn ergänzenden ebenen Kurve C^3 sind, und daraus folgt weiter:

Jede der 55 ebenen Kurven 3. Ordnung der Fläche wird von 9 Geraden derselben einmal, von 2 keinmal getroffen.

(In der Zusammenstellung einer C^3 mit einer sie einmal treffenden Gerade stossen wir zum ersten Male auf eine, wenngleich zerfallene Raumkurve 4. Ordnung I. Art.)

Auf Grund des soeben erhaltenen Ergebnisses ist es leicht, das Verhalten der 55 Kegelschnitte gegenüber einer ebenen Kurve 3. Ordnung C^3 der Fläche festzustellen:

Von dem Ergänzungskegelschnitt K der C^3 wissen wir, dass er ihr sechsmal begegnet. Die 54 übrigen Kegelschnitte denken wir uns mit D^3 und ihren jeweiligen beiden Stützgeraden zur vollen Schnittkurve einer Fläche 2. Ordnung mit unserer Fläche F_3^5 ergänzt. Diese Flächen 2. Ordnung haben mit C^3 je 6 Punkte gemein, darunter sämtlich die drei Punkte D_1, D_2, D_3 auf D^3. Bei $\frac{9.8}{1.2} = 36$ Flächen 2. Ordnung treffen noch die beiden Stützgeraden die Kurve C^3, bei $9.2 = 18$ nur eine. Infolgedessen müssen die 36 Kegelschnitte des ersten Falles als Restkurven C^3 noch in $6 - 3 - 2 = 1$ Punkte, die 18 des zweiten Falles noch in $6 - 3 - 1 = 2$ Punkten treffen. Wir haben also den Satz:

Eine ebene Kurve 3. Ordnung der Fläche wird von 36 Kegelschnitten einmal, von 18 zweimal getroffen.

Oder, indem wir von diesen Treffkegelschnitten zu den sie bezw. ergänzenden Kurven 3. Ordnung übergehen:

Eine ebene Kurve 3. Ordnung der Fläche wird von 36 anderen zweimal, von den 18 noch übrigen einmal getroffen.

Andererseits können wir aber auch bei vorliegendem Kegelschnitte von dessen 36 einmal, 18 keinmal treffenden Kegelschnitten zu deren Ergänzungskurven 3. Ordnung übergehen und erhalten:

Ein Kegelschnitt der Fläche wird von 36 ebenen Kurven 3. Ordnung einmal, von 18 zweimal ge-

troffen. Die 55. noch fehlende Kurve 3. Ordnung ist seine Ergänzungskurve.

19. Jede auf unserer Fläche verlaufende ebene Kurve 4. Ordnung erfordert zur Vervollständigung ihres ebenen Schnittes zu einem solchen 5. Ordnung eine Gerade, und umgekehrt schneidet jede Ebene durch eine Gerade unserer Fläche noch in einer ebenen Kurve 4. Ordnung. Wir erhalten also durch die Ebenen der Büschel mit den 11 Geraden der Fläche als Axen elf einfach unendliche Systeme von ebenen Kurven 4. Ordnung. Durch jeden Punkt der Fläche ist i. a. je eine Kurve aus den elf einfach unendlichen Systemen bestimmt, weshalb dieselben als Büschel von Kurven C^4 bezeichnet werden mögen.

Jede solche Kurve C^4 schneidet, wie bereits gelegentlich bemerkt, die sie ergänzende Gerade g in vier Punkten, welche Doppelpunkte der vollen Schnittkurve g C^4 sind. Von ihnen rühren zwei, die beiden Stützpunkte von g auf D^3, D_1 und D_2, von dieser als singulären Linie unserer Fläche her, während die beiden anderen Treffpunkte von g und C^4, S_1 und S_2, auf zweimalige Berührung der Ebene C^4g mit unserer Fläche zurückgeführt werden müssen.

In dem dritten Schnittpunkt D_3 der Doppelkurve D^3 mit der Ebene gC^4 hat C^4 einen Doppelpunkt.

Lassen wir die Ebene C^4g ihren Büschel mit g als Axe durchlaufen, so ergeben sich in den verschiedenen Lagen lauter neue Kurven 4. Ordnung, $C^{4\prime}$, $C^{4\prime\prime}$, ... welche g ebenso wie C^4 in vier Punkten schneiden. Von diesen sind naturgemäss die beiden Punkte D_1 und D_2 fest, während die andern beiden S_1', S_2'; S_1'', S_2''; ..... sich von Ebene zu Ebene ändern müssen; denn käme es auch nur einmal vor, dass einer der Punkte S_1', S_2' mit S_1'' oder S_2'' identisch würde, so müssten in diesem Punkte die beiden von einander verschiedenen Ebenen $C^{4\prime}g$ und $C^{4\prime\prime}g$ unsere Fläche berühren, während doch ein einfacher Punkt derselben, wie wir sie ausserhalb der Doppelkurve durchweg voraussetzen, nur eine Berührungsebene haben kann.

Daraus folgt, dass einem Punkte S'_1 auf einer Gerade g eindeutig eine Berührungsebene zugeordnet ist, deren Restschnitt 4. Ordnung $C^{4\prime}$ mit der Fläche die Gerade nur noch einmal ausserhalb der Doppelkurve in einem Punkte S_2' trifft, und dass dieser Punkt S_2', als Ausgangspunkt genommen, nach dem gleichen Verfahren zu S_1' zurückführt.

Die Punktepaare S_1, S_2; S_1', S_2'; S_1'', S_2''; ....., in denen die Kurven C^4, $C^{4\prime}$, $C^{4\prime\prime}$, ... eines Büschels mit einer Gerade g als Axe diese ausserhalb der Doppelkurve treffen, bilden also eine Involution 2. Grades. Die beiden Doppelpunkte beweisen, dass es unter den einfach unendlich vielen Kurven 4. Ordnung in den Ebenen durch eine Gerade der Fläche zwei gibt, welche sie berühren.

20. Da sämtliche ∞^1 Ebenen des Büschels um eine Gerade g der Fläche als Axe Doppelberührungsebenen der Fläche sind, wird sich unter ihnen eine endliche Anzahl erwarten lassen, welche noch eine einfache Bedingung erfüllen, wie z. B. die, die Fläche noch ein drittes Mal zu berühren. In diesem Falle müsste also die in einer solchen Ebene gelegene Kurve 4. Ordnung C^4 ausser dem bereits gefundenen Doppelpunkt D_3 auf D^3 noch einen weiteren, notwendig ausserhalb der Doppelkurve D^3 gelegenen besitzen; und auf die Bestimmung der Anzahl dieser Kurven läuft schliesslich die Frage hinaus. Die Gesamtheit solcher Kurven bei allen elf Geraden der Fläche führt uns also durch ihre Trägerebenen zu den Gliedern eines 2. Typus dreifacher Berührungsebenen.

Wir lösen die Aufgabe durch ein Verfahren, das uns auch späterhin bei Berechnung der Glieder eines dritten und letzten, des allgemeinsten Typus zum Ziele führen wird, vermittelst einer **Abbildung unserer Fläche F_3^5 auf eine Ebene.**

Wir setzen fest, dass zwei solche Punkte X und X' der Fläche F_3^5 bzw. der Bildebene einander entsprechen mögen, welche auf einer und derselben

Doppelsekante von D^3 als deren fünfter Schnitt mit der Fläche bzw. deren Schnitt mit der Bildebene gelegen sind. Dadurch wird jedem Punkt X der Fläche i. A. eindeutig ein Punkt X' als Bildpunkt, aber auch umgekehrt jedem Punkt X' der Bildebene ein Punkt X der Fläche zugeordnet, weil von ihm nur eine Doppelsekante an D^3 geht.

Für einen Punkt unserer Fläche, welcher ausserhalb der Doppelkurve D^3 liegt, ist es hiernach sofort möglich, seinen Bildpunkt anzugeben. Einige Überlegung erfordert die Frage, was das Bild eines auf der Doppelkurve selbst gelegenen Punktes D der Fläche ist: Der Definition zufolge ist dies die Spur derjenigen durch D gehenden Doppelsekante von D^3, welche als fünften Schnittpunkt mit der Fläche den Punkt D besitzt, also in ihm die Fläche berührt. Solcher in D unsere Fläche F_3^5 berührender Doppelsekanten von D^3 gibt es zwei: Man erhält sie, wenn man in D die beiden Tangentialebenen an F_3^5 legt und den Berührungspunkt D mit den beiden dritten Punkten T_1 und T_2, in denen diese beiden Ebenen die kubische Kurve D^3 noch schneiden, verbindet. Die Spurpunkte der beiden Linien DT_1 und DT_2 in der Bildebene liefern also das Bild des Punktes D. Ein auf der Doppelkurve gelegener Punkt der Fläche besitzt also zwei Bildpunkte, was mit seiner Eigenschaft als doppelter Punkt unserer Fläche im Einklang steht.

(Wie man alsbald sieht, fallen bei jedem der drei in der Bildebene gelegenen Punkte der Doppelkurve seine beiden Bildpunkte mit einander und mit ihm selbst zusammen.)

Schliesslich treten drei Punkte der abzubildenden Fläche als Ausnahmepunkte in der Abbildung auf: Die fünften Schnittpunkte U, V, W, der drei in der Bildebene liegenden Doppelsekanten von D^3, insofern diesen drei Punkten der Fläche nicht mehr ein Punkt als Bild zugehört, sondern unendlich viele: sämtliche Punkte der betreffenden, durch ihn gehenden Doppelsekante.

Wir wenden uns noch zu den singulären Punkten der Bildebene d. h. denjenigen Punkten, welche nicht mehr wie im allgemeinen Falle Bilder eines Punktes der Fläche sind.

Von dieser Beschaffenheit sind die elf Spurpunkte $G_1, G_2, \ldots G_{11}$ der elf Geraden $g_1, g_2, \ldots g_{11}$ der Fläche in der Bildebene; denn jeder dieser elf Punkte G_i ist das Bild jedes der ∞^1 Punkte von g_i. Hieraus folgt übrigens, dass eine auf unserer Fläche verlaufende Kurve, welche xmal über eine Gerade g_i fortschreitet, eine Bildkurve besitzt, welche den Punkt G_i zum x-fachen Punkte hat.

Ausser den Punkten $G_1, G_2, \ldots G_{11}$ sind als weitere singuläre Punkte der Bildebene noch deren drei Schnittpunkte mit der Doppelkurve der Fläche. A, B, C, vorhanden, denen auf unserer Fläche alle Punkte je einer Raumkurve 4. Ordnung entsprechen, in welchen der von einem solchen Punkte nach D^3 hingehende Projektionskegel 2. Grades die Fläche noch schneidet; aus dieser Entstehungsweise folgt, dass die sich ergebenden Restschnittkurvengebilde 4. Ordnung tatsächlich dem früher behandelten Netze von R^4_{II} angehören. Wir bezeichnen diese drei sich bei A, B und C ergebenden Kurven R^4_{II} mit bezw. A^4_{II}, B^4_{II}, C^4_{II}. A ist also das Bild aller Punkte der Kurve A^4_{II}; und ähnliches gilt für B und C[1]). Wie vorhin bei den g_i folgt, dass eine auf unserer Fläche verlaufende Kurve, welche xmal über A^4_{II} fortschreitet, eine Bildkurve besitzt, welche A zum xfachen Punkte hat; analoges gilt natürlich für B^4_{II} und B; C^4_{II} und C.

Weitere Ausnahmepunkte als die Gi und A, B, C, sind in Bildebene nicht vorhanden.

Kehren wir jetzt wieder zu den ebenen Kurven 4. Ordnung C^4 in den Ebenen des Büschels um eine Gerade g der

[1]) Das volle Bild der Kurven A^4_{II}, B^4_{II}, C^4_{II} besteht bez. aus den Geradenpaaren AB, AC; BC, BA; CA, CB; wie sich aus dem vorhin über die drei Geraden AB, BC, CA Gesagten ergibt.

Fläche als Axe zurück und sehen zu, wie sich die Bilder dieser Kurven in der Abbildungsebene gestalten. Jede der Kurven trifft g viermal, darunter zweimal auf D^3 in D_1 und D_2, zweimal in beliebigen Punkten S_1 und S_2 der Gerade; die übrigen zehn Geraden der Fläche werden von den Kurven C^4 je einmal getroffen; ferner besitzen die letzteren in den dritten Punkten, in denen ihre Ebene ausser in D_1 und D_2 die kubische Doppelkurve D^3 noch schneidet, je einen Doppelpunkt, D_3.

Es gilt nun allgemein, dass die Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, welche eine Kurve der Ordnung n treffen, die Erzeugenden einer Regelfläche $4.\ n^{ten}$ Grades bilden. (No. 3, S. 9.) In unserem Falle ist diese Regelfläche vom Grade 16. In jedem etwaigen Treffpunkte der kubischen Raumkurve mit der anderen Kurve, der Leitkurve, spaltet sich von der erhaltenen Fläche ein Kegel 2. Grades ab (der Projektionskegel der kubischen Kurve aus diesem Punkte), der, im Falle der Treffpunkt ein Doppelpunkt jener Kurve ist, doppelt gezählt werden muss. Daraus folgt, dass sich in unserem Falle von der erhaltenen Regelfläche 16. Grades wegen der Punkte D_1 und D_2 zwei einfach zählende, wegen des Punktes D_3 ein doppelt zählender Kegel abspalten. Die Erzeugenden dieser drei Abspaltungskegel werden nach den Gesetzen der Abbildung i. a. nicht zu Bildpunkten von Punkten der Kurve C^4 führen, wohl aber die Erzeugenden der noch verbleibenden Regelfläche von der Ordnung $16-1.2-1.2-2.2=8$. Damit reduziert sich das Bild der Kurve C^4 auf eine Kurve von der Ordnung 8.

Zufolge einer gelegentlich gemachten Bemerkung geht eine solche Bildkurve C^8 durch Punkt G doppelt, durch die Spurpunkte der übrigen zehn Geraden, $G_1, \ldots\ldots G_{10}$, einfach. Da ferner die Kurven $A^4_{II}{}^8$, B^4_{II} C^4_{II} als Kurven des in § 2 behandelten Netzes keine Gerade der Fläche (also auch g nicht) treffen, treffen sie jede der Kurven C^4 des bei der Gerade g betrachteten Büschels viermal; daraus aber folgt wiederum, dass ihre Bildkurven C^8 in der Bildebene jeden der drei Punkte A, B, C als vierfache Punkte besitzen.

Dem betrachteten einfach unendlichen System von Kurven C^4 der Fläche entspricht also in der Bildebene ein einfach unendliches System von Kurven C^8, welche einen Doppelpunkt (G), zehn einfache ($G_1, \ldots G_{10}$) und drei vierfache Punkte A, B, C gemeinsam haben. Als Bestimmungsstücke einer Kurve 8. Ordnung haben diese Punkte gemäss dem Satze, dass ein Punkt, der ein rfacher Punkt einer zu bestimmenden Kurve werden soll, mit $\frac{1}{2}\, r\,(r+1)$ gegebenen einfachen Punkten äquivalent ist, die Bedeutung von $1.3 + 10.1 + 3.10 = 43$ einfachen Punkten; da aber eine ebene Kurve 8. Ordnung zu ihrer vollen Bestimmung $\frac{1}{2}\, 8\,(8+3) = 44$ einfacher Punkte bedarf, bestimmen die angegebenen, 43 einfachen Punkten äquivalenten Punkte einen Büschel von Kurven 8. Ordnung C^8.

Ist $C^{8\prime}$ eine beliebige, aber bestimmte Kurve dieses Büschels, P' ein Punkt auf ihr, s die von ihm an D^3 gehende Doppelsekante und P ihr fünfter Schnittpunkt mit unserer Fläche F^5_3, dessen Bildpunkt also P' ist, so ist durch Pg genau eine Ebene festgelegt und in ihr eine Kurve C^4 des Büschels um g als Restschnitt. Deren Bild ist eine Kurve C^8 des Büschels, welche u. a. auch den Punkt P', als Bildpunkt von P, enthält und darum mit $C^{8\prime}$ identisch ist. Wir haben damit also jetzt umgekehrt zu jeder Kurve C^8 des Büschels in der Bildebene eine bestimmte Kurve C^4 des Büschels um g gefunden, deren Bild sie ist.

Die Kurven C^8 des Büschels in der Bildebene haben, wie gefunden, drei vierfache, einen zweifachen und zehn einfache Punkte gemein, äquivalent $3.16 + 1.4 + 10.1 = 62$ einfachen Punkten. Es fehlen also zur Ergänzung zu $8.8 = 64$ noch zwei der Grundpunkte des Büschels. Diese ergeben sich aus den beiden, allen Kuren C^4 des betrachteten Büschels gemeinsamen Punkten D_1 und D_2: Jeder dieser beiden Punkte hat nämlich, wie früher gefunden, als Punkt der Doppelkurve zwei Bildpunkte, entsprechend den beiden durch ihn hindurchgehenden Schalen der Fläche. Aus diesen

Bildpunktepaaren kommt aber bei Durchlaufung der Kurven C^4 beidemale nur der eine zustande, nämlich derjenige, welcher sich durch die Tangente derselben Flächenschale ergibt, auf der die Kurve C^4 durch D_1 bezw. D_2 hindurchläuft.

Da eine Kurve C^4 Punkt für Punkt eindeutig auf ihre Bildkurve C^8 bezogen ist, müssen beide gleiches Geschlecht haben. In der Tat, rechnet man auftretende $r$fache Punkte in $\frac{1}{2}\, r\,(r-1)$ Doppelpunkte um, so ergibt sich als Geschlecht von C^4 $\frac{1}{2}.3.2-1$, als Geschlecht von C^8 $\frac{1}{2}7.6-3.$ $\frac{1}{2}.4.3-1$, also beidemale zwei.

So oft nun eine Kurve C^4 der Fläche einen (ausserhalb D^3 gelegenen) Doppelpunkt D besitzt, muss ihre Bildkurve C^8 in dem Bildpunkt D' von D ebenfalls einen Doppelpunkt besitzen, wie die kontinuierliche Durchlaufung der beiden Zweige von C^4 durch D belehrt. Und umgekehrt: So oft eine Kurve C^8 des Büschels in der Bildebene einen Doppelpunkt D' besitzt, muss auch die Kurve C^4 der Fläche, deren Bild sie ist, einen Doppelpunkt D besitzen, welcher D' als Bildpunkt hat.

Damit ist die früher (Nr. 20 S. 42) aufgeworfene Frage nach der Zahl der Kurven C^4 des Büschels um g, welche einen ausserhalb D^3 gelegenen Doppelpunkt besitzen, zurückgeführt auf die Frage nach der Zahl der Kurven C^8 in unserem Büschel, welche noch einen weiteren Doppelpunkt besitzen.

Wir vereinfachen die Beantwortung dieser Frage, indem wir die Bildebene, welche von nun ab mit ε bezeichnet werden möge, transformieren in eine andere ε^* mit Hilfe einer quadratischen Transformation, welche in ε die Punkte A, B, C zu Hauptpunkten besitzt.

Die Hauptpunkte des andern Feldes mögen A^*, B^*, C^*, heissen in der üblichen Zuordnung von A und B^*C^*, u. s. w. Vermöge dieser verwandtschaftlichen Beziehung entsprechen

den Kurven 8. Ordnung C^8 unseres Büschels in ε Kurvengebilde 16. Ordnung in ε^*, von denen sich aber entsprechend der Vierfachheit der Hauptpunkte A, B, C auf den C^8 die Geraden B^*C^*, C^*A^*, A^*B^* je viermal ablösen; es verbleibt also als eigentlich entsprechendes Gebilde nur noch ein solches von der Ordnung $16 - 3 \cdot 4 = 4$. Diese durch Transformation der C^8 hervorgegangenen Kurven C^{4*} enthalten nach den Regeln der quadratischen Verwandtschaft die Hauptpunkte A^*, B^*, C^* ihres Feldes je $8 - 4 - 4 = 0$ mal d. h. gar nicht. Hingegen sind ihnen die den Punkten G, G_1, ... G_{10} von 8 entsprechenden Punkte G^*, G^*_1, ... G^*_{10}, sowie die den Bildern von D_1 und D_2 entsprechenden Punkte gemeinschaftlich und zwar ist Punkt G^* für sie Doppelpunkt, wie wiederum das Durchlaufen der beiden Äste von C^8 durch G lehrt.

Aus ebendiesem Grunde folgt auch, dass jeder Kurve C^8 unseres Büschels in ε, welche noch einen Doppelpunkt D besitzt, in ε^* eine Kurve C^{4*} entspricht, welche gleichfalls in dem dem D entsprechenden Punkte D^* einen weiteren Doppelpunkt besitzt, und umgekehrt.

Damit kommt also die vorhin erwähnte, früher aufgeworfene Frage hinaus auf die, wie viele Kurven in unserem Büschel von C^{4*} mit dem gemeinschaftlichen Doppelpunkte G^* noch einen weiteren Doppelpunkt besitzen. Die Antwort hierauf aber folgt aus dem Satze[1]): Wenn die Kurven eines Büschels einen rfachen Punkt gemein haben, so zählt dieser für $(r-1)(3r+1)$ Doppelpunkte des Büschels, in unserem Falle, wo $r = 2$ ist, für 7. Denn da die Kurven unseres Böschels $3 \cdot 3^2 = 27$ Doppelpunkte enthalten müssen, so verbleiben hier $27 - 7 = 20$ Kurven C^{4*} mit einem von G^* verschiedenen weiteren Doppelpunkt.

Das ist also auch die Zahl der Kurven C^4 in einem Ebenenbüschel um eine Gerade g unserer Fläche, welche noch einen weiteren Doppelpunkt haben, deren Ebene die

[1]) Cremona: Einl. i. e. geom. Th. d. eb. Kurven S. 261, 262.

Fläche noch ein drittes Mal berührt[1]). So folgt der Satz:

Durch jede Gerade unserer Fläche gehen 20 dreifach berührende Ebenen der Fläche, durch alle elf also: $11 \cdot 20 = 220$ [2]).

21. Damit eine Ebene unsere Fläche dreifach berühre, muss ihre Schnittkurve, die wegen ihrer drei Begegnungspunkte mit der Doppelkurve D^3 bereits drei Doppelpunkte besitzt, noch drei weitere dazu bekommen. Die in diesem Falle sich ergebende Kurve 5. Ordnung mit sechs Doppelpunkten kann nun entweder in Kurven niedrigerer Ordnung zerfallen u. z. einerseits in Kegelschnitt und ebene Kurve 3. Ordnung (was die dreifachen Berührungsebenen des I. Typus lieferte), andererseits in Gerade und ebene Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten (II. Typus) oder auch nicht zerfallen, wobei sich dann eine Kurve 5. Ordnung mit der Maximalzahl 6 von Doppelpunkten ergibt. Mit Hilfe solcher Kurven

---

[1]) Wir hätten uns bereits vorhin die Aufgabe stellen können, aus dem in ε erhaltenen Büschel von Bildkurven 8. Ordnung, C^8, die Zahl der Kurven mit noch einem weiteren Doppelpunkt zu bestimmen. Die Anwendung des zitierten Cremonaschen Satzes hätte dort $3 \cdot 7^2 - 7 - 3 \cdot 3 \cdot 13 = 23$ ergeben, was scheinbar auf 23 dreifache Berührungsebenen durch eine Gerade g der Fläche hinweist. Der Widerspruch löst sich so: Durch g gehen drei Ebenen nach den drei Punkten U, V, W, den fünften Schnittpunkten von bzw. BC, CA, AB mit der Fläche. Die Restschnittkurve 4. Ordnung in jeder derselben z. B. in der Ebene (g, U) bildet sich wegen des auf ihr liegenden Punktes U ab in die Gerade BC und eine sie ergänzende Kurve 7. Ordnung C^7, die dann B und C nur zu $4 - 1 = 3$fachen Punkten besitzt. C^7 muss BC somit in noch einem Punkte U' treffen, der dann für die volle Bildkurve 8. Ordnung (BC, C^7) ein Doppelpunkt ist, ohne dass die Ebene (g, U) Berührungsebene unserer Fläche wäre. Analoges gilt für die beiden anderen Ebenen, (g, V), (g, W). Damit ergibt sich auch hier obige Zahl 20. Bei unserer Transformation nach ε^* geht der Doppelpunkt U' und analog V', W', weil auf Seiten des Hauptdreiecks gelegen, verloren; die entsprechende Kurve von (BC, C^7) geht durch A^*; analoges gilt in den anderen zwei Fällen.

[2]) Damit findet ein Ergebnis, das schon von Herrn Sturm in Math. Ann. Bd. 4. S. 252 angegeben ist, auf wesentlich anderem Wege seine Bestätigung.

und ihrer Trägerebenen würde sich ein dritter und letzter Typus dreifacher Berührungsebenen unserer Fläche ergeben.

Um deren Zahl zu ermitteln, benützen wir wiederum die vorhin eingeführte Abbildung der Fläche auf eine Ebene ε.

Jede ebene Schnittkurve 5. Ordnung der Fläche, C^5, wird in allen ihren Punkten von je einer Doppelsekante der D^3 getroffen, die in ihrer Gesamtheit eine Regelfläche $5 \cdot 4 = 20$. Grades erzeugen. Von dieser spalten sich wegen der drei Begegnungspunkte von C^5 mit D^3, welche Doppelpunkte von C^5 sind, drei doppelt zählende Kegel 2. Grades ab, und nur die noch verbleibende Regelfläche vom Grade $20 - 3.2.2 = 8$ führt aus dem vorhin beim II. Typus näher angegebenen Grunde durch ihre Spurlinie in ε zur Bildkurve des ebenen Schnittes C^5. Also: Jedem ebenen Schnitte C^5 unserer Fläche entspricht als Bild eine Kurve 8. Ordnung. Dieselbe möge mit C^8 bezeichnet werden.

Da eine Kurve C^5 jede der elf Geraden der Fläche einmal schneidet, muss ihre Bildkurve C^8 durch jeden der Punkte $G, G_1, \ldots\ldots G_{10}$ einmal hindurch gehen; und da ferner C^5 jede der drei früher eingeführten Kurven A^4_{II}, B^4_{II}, C^4_{II} viermal schneidet, muss ihre Bildkurve C^8 jeden der Punkte A., B, C von ε als vierfachen Punkt besitzen.

Wir erhalten also als System der Bildkurven, welche den ∞^3 ebenen Schnittkurven unserer Fläche entsprechen, ein System von Kurven 8. Ordnung C^8 mit 11 einfachen und drei vierfachen gemeinschaftlichen Punkten.

Zur Bestimmung einer Kurve C^8 haben diese gemeinschaftlichen Punkte die Bedeutung von $11 + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 41$ einfachen Punkten, weswegen ∞^3 Kurven 8. Ordnung C^8 durch sie in der angegebenen Weise hindurchgehen werden.

Sei C^8 eine beliebige aber bestimmte unter ihnen, so wollen wir nun sehen, ob sich auch rückwärts zu einer solchen der ∞^3 Kurven C^8 eine C^5 auf der Fläche finden

lässt, deren Bild sie ist. Dazu denken wir uns auf C^8 drei Punkte gelegt, P', P'_1, P'_2; P, P_1, P_2 seien die Punkte unserer Fläche, zu denen jene bzw. als Bildpunkte gehören. P, P_1, P_2 bestimmen eine Ebene π im Raume und diese eine Schnittkurve C^5 mit der Fläche. Ihre Bildkurve C^8 muss durch A, B, C, G, G_1, ... G_{10} sowie auch P', P'_1, P'_2 in bekannter Weise hindurchgehen. Alle diese Punkte haben aber zusammen die Bedeutung von $41 + 3 = 44$ bestimmenden Punkten und legen eindeutig eine Kurve 8. Ordnung fest, weswegen die als Bild von C^5 gefundene C^8 mit der Ausgangskurve C^8 identisch sein muss. Also gehört in der Tat auch umgekehrt zu jeder Kurve C^8 des dreifach unendlichen Kurvensystems eine Schnittkurve C^5 der Fläche, deren Bild sie ist. (Wiederum ergibt sich als Kontrolle für die Richtigkeit der Abbildung die Gleichheit des Geschlechtes der Kurven C^5 und C^8: es beträgt $\frac{1}{2}\,4\cdot 3 - 3 = \frac{1}{2}\,7\cdot 6 - 3\cdot 6 = 3$).

Da es für eine Kurve eine einfache Bedingung bedeutet, wenn sie einen Doppelpunkt besitzen soll, werden wir in dem dreifachunendlichen System von Kurven C^8 eine endliche Anzahl von Kurven mit drei Doppelpunkten zu erwarten haben.

Um die Untersuchung der Anzahl dieser Kurven zu erleichtern, transformieren wir wie vorhin im analogen Falle unser Feld ε in ein anderes ε^* vermittelst einer quadratischen Transformation, welche in ε A, B, C zu Hauptpunkten besitzt. Ganz ähnlich wie in dem vorhin behandelten Falle gehen die Kurven C^8 dann über in Kurven C^{4*} vom Geschlecht 3, also solche ohne Doppelpunkte, welche die Punkte G^*, ... G^*_{10}, die bzw. entsprechenden Punkte von G, ... G_{10}, enthalten aber nicht mehr die Hauptpunkte A^*, B^*, C^* des neuen Feldes. Und die Frage nach den Kurven C^8 mit drei Doppelpunkten geht hier über in die Frage nach der Zahl der Kurven 4. Ordnung C^{4*}, welche sämtlich durch elf Punkte (G^*, ... G^*_{10}) gehen und dazu drei Doppelpunkte haben. Die Anzahl dieser

Kurven ist aber von Herrn Zeuthen als 620 gefunden worden[1]).

Es folgt also:

Die Fläche F_3^5 besitzt 620 dreifache Berührungsebenen, welche sie in einer nicht zerfallenden Kurve 5. Ordnung mit sechs Doppelpunkten schneiden[2]).

So ergibt sich das zusammenfassende Schlussresultat:

Die Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve besitzt insgesamt 55+220+620=895 dreifache Berührungsebenen, welche nach Art ihrer Schnittkurve mit der Fläche in drei verschiedene Typen zerfallen:

I. 55 schneiden die Fläche in einem Kegelschnitt und ihn ergänzender ebener Kurve 3. Ordnung.

II. 220 schneiden in einer Gerade uud einer Kurve 4. Ordnung mit 2 Doppelpunkten.

III. 620 schneiden in einer Kurve 5. Ordnung mit 6 Doppelpunkten..

§ 7

Die Klasse der Fläche.

22. Die im vorigen eingeführte Abbildung unserer Fläche gestattet leicht, ihre Klasse, d. i. die Anzahl der Berührungsebenen, welche durch eine beliebige Gerade g des Raumes an sie gehen, zu ermitteln: Wie wir sahen, entsprechen allen ebenen Schnittkurven unserer Fläche zufolge der Abbildung auf eine Ebene ε und einer gewissen quadratischen Transformation derselben in eine andere Ebene ε^* lauter Kurven 4. Ordnung C^{4*} mit 11 gemeinsamen Grundpunkten. Insbesondere haben die ∞^1 Bildkurven der-

[1]) (Zeuthen. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver. Schriften der dän. Ak. der Wiss. Nat.-math. Abth. 10 Bd. 1873. Nr. 63. Tab. 10 $P_3\mu$. S. auch: Schubert.: Kalkül der abzählenden Geometrie S. 186.

[2]) Dieser letzte Typus dreifacher Berührungsebenen findet sich in der mehrfach citierten Abhandlung Math. Ann. Bd. 4 noch nicht.

jenigen ebenen Schnittkurven, welche von den Ebenen des Büschels um eine Gerade g als Axe eingeschnitten werden, ausser diesen elf Punkten noch fünf weitere gemeinsam: Die fünf Bildpunkte der fünf Punkte der Fläche, in welchen diese von der Gerade g getroffen wird. Solche ∞^1 Bildkurven haben also 16 Punkte gemeinsam, sie bilden einen Büschel von Kurven 4. Ordnung. Fragen wir nun nach der Anzahl der Ebenen durch g, welche die Fläche berühren, d. h. in einer Kurve 5. Ordnung mit neu hinzutretendem Doppelpunkt schneiden, so bedeutet dies beim Uebergang in die Bildebene ε^*: Wie viele Kurven 4. Ordnung haben einen Doppelpunkt? Die Zahl dieser Kurven beträgt allgemein beim Büschel m. Ordnung $3(m-1)^2$, hier also 27. Und da auch rückwärts jeder Kurve C^{4*} des Büschels mit einem Doppelpunkt eine Schnittkurve C^5 der Fläche mit einer Ebene durch g, ebenfalls mit einem Doppelpunkt, also eine Berührungsebene der Fläche durch g entspricht, so ist damit die Klasse der Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve als 27 erkannt. (Damit findet ein Ergebnis, das schon von Herrn Sturm in Math. Ann. Bd. 4. S. 251 unter Heranziehung der Polarentheorie gefunden worden ist, seine Bestätigung.)

---

§ 8.

462 einzelne Raumkurven 3. Ordnung der Fläche.

23. Nachdem im bisherigen Verlauf alle nur möglichen ebenen Kurven der Fläche von den Geraden bis zu den vollen Schnittkurven 5. Ordnung betrachtet worden sind, wenden wir uns nun zunächst zu den einfachsten Raumkurven, den kubischen, deren wir gelegentlich bereits elf einfach unendliche Systeme gefunden haben. Man gelangt zu einem neuen, endlichen Systeme solcher Kurven auf die folgende Weise:

Durch die Doppelkurve D^3 der Fläche sowie drei ihrer Kegelschnitte K_{12}, K_{34}, K_{56}, deren zu-

gehörige Geradenpaare g_1, g_2; g_3, g_4; g_5, g_6 durchweg verschieden seien und die deshalb zu je zweien einen Punkt gemeinsam haben (No. 10 S. 20), werde eine Fläche 3. Ordnung hindurchgelegt. Da es für eine solche Fläche gleichbedeutend mit zehn vorgegebenen Punkten ist, wenn sie eine kubische Raumkurve und gleichbedeutend mit sieben Punkten ist, wenn sie einen Kegelschnitt enthalten soll, die drei Kegelschnitte aber unter sich je einen, mit D^3 je drei Punkte gemeinsam haben, so ist unsere Forderung für die Bestimmung der Fläche 3. Ordnung äquivalent $10 + 3.7 - 3.1 - 3.3 = 19$ bestimmenden Punkten; durch die genannten Kurven D^3, K_{12}, K_{34}, K_{56} geht also gerade eine Fläche 3. Ordnung F^3 hindurch.

Ihr Schnitt mit unserer Fläche $F_3{}^5$ ist ein Kurvengebilde 15. Ordnung, von dem wir bereits die doppelt zählende D^3 sowie K_{12}, K_{34}, K_{56} kennen; es verbleibt also noch eine Restschnittkurve der Ordnung $15 - 2.3 - 2 - 2 - 2 = 3$.

Da die Geraden g_1, g_2, . . . : g_6 der Fläche mit den Bestimmungskurven D^3, K_{12}, K_{34}, K_{56}, erst drei Punkte gemein haben (zwei auf D^3, einen auf einem der Kegelschnitte), die fünf übrigen Geraden der Fläche g_7, ... g_{11}, aber nur zwei (auf D^3), so würde es weiterer bestimmender Punkte bedürfen, wenn die Fläche 3. Ordnung F^3 eine von ihnen enthalten sollte. Sie werden daher nicht auf F^3 liegen und folglich auch nicht zu deren Restschnittkurve 3. Ordnung gehören, d. h. aber, diese muss eine nicht zerfallende kubische Raumkurve sein; sie möge im folgenden mit Q^3 bezeichnet werden.

Indem, wie gefunden, die Geraden g_1, . . . g_6 nicht auf F^3 liegen und mit ihr bereits drei Punkte (auf D^3 und einem der K) gemein haben, dürfen sie Q^3 keinmal treffen. Andererseits treffen aber g_7 . . . . g_{11}, welche mit F^3 zwei Punkte auf D^3, keinen auf K_{12}, K_{34}, K_{56} gemein haben, diese noch ein drittes Mal, was ersichtlich auf deren Restschnitt Q^3 geschehen muss. Wir haben also:

Die neu gefundene kubische Raumkurve Q^3 begegnet 6 Geraden der Fläche (den Stützgeraden der

drei Kegelschnitte, mit deren Hilfe sie entstand) keinmal, den übrigen fünf einmal.

Was die Begegnung von Q^3 mit den 55 Kegelschnitten betrifft, so lassen sich dieselben hier in drei Gruppen teilen, je nachdem von ihren zwei Stützgeraden beide, eine oder keine den Geraden $g_1, g_2, \ldots g_6$ angehört:

Die Kegelschnitte der letzten Art haben ihre beiden Stützgeraden unter den fünf, von Q^3 je einmal getroffenen Geraden $g_7, \ldots g_{11}$ und betragen $\frac{5.4}{1.2} = 10$ an Zahl. Von ihren 6 Schnittpunkten mit der Fläche 3. Ordnung F^3 liegen drei auf D^3 und je einer auf K_{12}, K_{34}, K_{56} (denn Kegelschnitte mit verschiedenen Geradenpaaren haben einen Schnittpunkt.) Damit sind aber alle sechs Schnittpunkte erschöpft; die betrachteten zehn Kegelschnitte können F^3 nicht mehr treffen, haben also mit Q^3 keinen Punkt gemein.

Die Kegelschnitte der zweiten Art, von deren zwei Stützgeraden eine den Geraden $g_1, \ldots g_6$, die andere den Geraden $g_7, \ldots g_{11}$ angehört ($5.6 = 30$ an Zahl), treffen gleichfalls D^3 in drei Punkten, von den Kegelschnitten K_{12}, K_{34}, K_{56} aber nur noch zwei in je einem Punkte, (denjenigen, mit welchem sie die eine Stützgerade gemeinsam haben, nicht), also F^3 noch in einem Punkte, der dann nur auf Q^3 liegen kann.

Es verbleiben noch $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Kegelschnitte, deren beide Stützgeraden zu $g_1, \ldots g_6$ gehören.

Unter ihnen treffen die zwölf, von K_{12}, K_{34}, K_{56} verschiedenen D^3 dreimal, von den genannten drei Kegelschnitten aber nur noch einen, mithin Q^3 zweimal.

Um zu erkennen, wie oft K_{12}, K_{34}, K_{56} selbst von Q^3 getroffen werden, ermitteln wir erst die Zahl der Begegnungspunkte von Q^3 mit der Doppelkurve D^3:

Sei F^2 eine Fläche 2. Ordnung, deren voller Schnitt aus D^3, einem der letztbetrachteten zwölf Kegelschnitte z. B. K_{23} und dessen zwei Stützgeraden g_2, g_3 bestehe. Die Fläche F^2 wird von Q^3 in sechs Punkten getroffen; von

diesen liegen, wie wir jetzt wissen, zwei auf K_{23}, keiner auf g_2 oder g_3, mithin vier auf D^3. Es folgt also das für spätere Zwecke sehr wichtige Ergebnis:

Die kubische Raumkurve Q^3 trifft die Doppelkurve der Fläche $F_3{}^5$ in vier Punkten.

Denken wir uns nun die Fläche 2. Ordnung, welche D^3, K_{12}, g_1, g_2 als vollen Schnitt besitzt, so wird dieselbe ja von Q^3 in sechs Punkten getroffen; von diesen liegen vier auf D^3, keiner auf g_1 oder g_2, mithin zwei auf K_{12}. Q^3 schneidet also K_{12}, (und, wie analog zu beweisen wäre) K_{34}, K_{56} je in zwei Punkten. Mithin werden alle 15 Kegelschnitte, deren beide Stützgeraden den Geraden g_1, . . g_6 angehören, von Q^3 zweimal getroffen.

Das zusammenfassende Ergebnis lautet: Von den 55 Kegelschnitten unserer Fläche trifft unsere kubische Raumkurve Q^3 10 keinmal, 30 einmal 15 zweimal.

Die Kurve Q^3 entstand als Restschnitt unserer Fläche $F_3{}^5$ mit einer Fläche 3. Ordnung F^3, welche durch die Doppelkurve D^3 und drei einander je einmal begegnende Kegelschnitte der Fläche gelegt wurde. Es scheint daher zunächst, als ob wir zu so vielen kubischen Raumkurven des Typus Q^3 gelangen, wie wir drei derart sich begegnende Kegelschnitte, nach früherer Bezeichnung Kegelschnitttripel (111) besitzen, nämlich 6930. (Nr. 11, S. 24.) Dabei ist freilich auf mehrfache Entstehungsweisen einer und derselben Kurve auf diesem Wege keine Rücksicht genommen. Solche Reproduktionen treten aber in der Tat ein:

Fassen wir zu diesem Zwecke eine bestimmte Kurve Q^3 ins Auge z. B. die vorhin benützte, welche sich mit Hilfe der drei Kegelschnitte K_{12}, K_{34}, K_{56} ergab; g_1, g_2; g_3, g_4; g_5, g_6 waren beziehentlich ihre Stützgeraden. Durch Abzählung an diesen Geraden überzeugt man sich leicht, dass es ausserdem noch 14, im ganzen also 15 Kegelschnitttripel (111) gibt, deren zugehörige drei Stützgeradenpaare aus diesen sechs Geraden g_1, g_2, . . . g_6 bestehen. K_{14}, K_{25}, K_{36} ist ein solches; g_1, g_4; g_2, g_5; g_3, g_6 sind die drei zu-

gehörigen Stützgeradenpaare. Durch die letztgenannten drei Kegelschnitte und D^3 werde die eine sie enthaltende Fläche 3. Ordnung $F^{3\prime}$ gelegt; wir betrachten die von ihr ausgeschnittene kubische Restkurve $Q^{3\prime}$: Wie vorhin bewiesen muss sie alle Kegelschnitte, die zu zwei der sechs Geraden $g_1, g_2, \ldots g_6$ gehören, zweimal treffen, insbesondere z. B. K_{12}, K_{34}, K_{56}, ausserdem auch D^3 und zwar viermal. Durch diese Kurven K_{12}, K_{34}, K_{56}, D^3 aber ging unsere vorhin betrachtete Fläche F^3, mit der die kubische Kurve $Q^{3\prime}$ folglich $3.2 + 4 = 10$ Punkte gemein hat und der sie infolgedessen ganz angehört; dann kann $Q^{3\prime}$ aber nichts anderes als die vorhin gefundene Kurve Q^3 selbst sein. Also:

Alle Flächen 3. Ordnung durch die Doppelkurve D^3 unserer Fläche sowie durch die Kegelschnitte irgend eines der 15 Tripel, welche zu einem bestimmten Geradensextupel gehören, schneiden die Fläche noch in einer und derselben kubischen Raumkurve Q^3. Dieselbe schneidet keine der sechs Geraden des Sextupels, hingegen die fünf übrigen je einmal.

Aus zuletzt genannter Eigenschaft folgt, dass alle übrigen Kegelschnitttripel (111), da ihre sechs zugehörigen Stützgeraden zum Teil von den sechs Geraden des betrachteten Sextupels verschieden sind, zu Kurven Q^3 führen, welche sich in anderer Weise gegen die elf Geraden der Fläche verhalten, also von jener verschiedene Kurven sind. Mithin reproduziert sich jede Kurve Q^3 15 mal und auch nicht öfter. Ihre Gesamtzahl beträgt also nur $\frac{6930}{15} = 462$.

Diese Zahl ist auch gleichzeitig die der Geradensextupel unserer Fläche $\left[\frac{11.10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5.6} = 462\right]$, was aus dem Gesagten unmittelbar folgt, indem ja jedem Sextupel eine Kurve Q^3 zugehört.

24. Nachdem wir so von kubischen Raumkurven unserer Fläche elf einfach unendliche Scharen und 462 einzelne

Kurven aufgefunden haben, erhebt sich die Frage, ob es auf ihr noch weitere Kurven dieser Art gibt.

Zur Entscheidung dessen diene der Satz[1]), welcher besagt, dass es für eine Fläche n. Ordnung, die durch eine Kurve q. Ordnung vom Geschlecht p hindurchgehen soll, $nq + 1 - p$ einfache Bedingungen bedeutet; am einfachsten sind diese Bedingungen in der Form, dass Kurve und Fläche so viele Punkte gemeinsam haben. Dieser Satz besteht freilich nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen; für $p < \frac{nq+1}{2}$ gilt er stets[2]) und ist darum für $p = 0,1$ von selbst erfüllt. Beim Geschlecht 0 handelt es sich also um $nq + 1$ Bedingungen, was sich übrigens in diesem Falle leicht aus der parametrischen Darstellung der Kurve herleiten lässt. Wird umgekehrt verlangt, dass eine Kurve q. Ordnung vom Geschlecht p auf einer gegebenen Fläche n. Ordnung liege, so ist die Zahl dieser Bedingungen mit der der vorigen gleich[3]), sodass also eine Kurve q. Ordnung vom Geschlecht 0 oder 1 auf einer gegebenen Fläche n. Ordnung liegt, wenn sie mit ihr $nq + 1$ bezw. nq Punkte gemeinsam hat.

Im Speziellen wird eine kubische Raumkurve auf einer Fläche 5. Ordnung liegen, wenn sie die $5.3 + 1 = 16$ einfachen Bedingungen erfüllt, beliebige, auf der Fläche verlaufende Kurven in 16 getrennten Punkten zu treffen. Da die Mannigfaltigkeit der kubischen Raumkurven aber nur 12 beträgt, vermögen sie auch höchstens nur 12 einfache Bedingungen zu erfüllen; die allgemeine Fläche 5. Ordnung kann deshalb keine kubische Raumkurve besitzen.

Bekommt die Fläche 5. Ordnung aber eine Doppelkurve, z. B. eine solche von der dritten Ordnung, so lässt es sich erreichen, dass kubische Raumkurven unter Erfüllung von

---

[1]) Halphen, Journ. de l'école polyt. Bd. 52 S. 12, 15.

[2]) Ebenda, S. 41.

[3]) Sturm, Journ. f. Math. Bd. 88 S. 234 und Schubert, Calc. d. abz. Geom. S. 10.

zwölf einfachen Bedingungen schliesslich doch 16 Punkte mit der Fläche gemein haben:

Setzen wir zunächst als die 12 einfachen Bedingungen einmaliges Treffen der Doppelkurve und 11 beliebiger anderer Kurven fest, so haben alle Kurven, die dieses leisten, bereits 13 Punkte mit der Fläche gemein. Auf diese Weise vorwärts schreitend gelangen wir schliesslich zu einem (wegen der 12 einfachen Bedingungen) endlichen Systeme kubischer Raumkurven, welche die Doppelkurve 4mal, 8 beliebige andere Kurven der Fläche je einmal treffen; diese haben mit der Fläche $4.2 + 8 = 16$ Punkte gemein und gehören ihr also ganz an. Die Fläche F_3^5 enthält mithin eine endliche Anzahl kubischer Raumkurven, welche die Doppelkurve D^3 viermal treffen.

Gehen wir noch einen Schritt weiter und betrachten die ∞^1 Kurven 3. Ordnung, welche 6 auf der Fläche verlaufende Kurven je einmal, die Doppelkurve fünfmal treffen (∞^1 viele wegen der $6 + 5 = 11$ Bedingungen), so gehören dieselben der Fläche wegen ihrer $6 + 5.2 = 16$ Schnittpunkte sämtlich an. Die Fläche F_3^5 enthält mithin ∞^1 kubische Raumkurven, welche die Doppelkurve D^3 fünfmal treffen.

Bis hierher galt das Gesagte auch dann, wenn die Doppelkurve der Fläche 5. Ordnung eine Raumkurve von höherer als der dritten Ordnung gewesen wäre. Beim nächsten Schritt kämen wir zu kubischen Kurven, welche 4 beliebige Kurven der Fläche einmal, die Doppelkurve 6 mal träfen und die wegen der zehn Bedingungen und $4 + 6 \cdot 2 = 16$ gemeinsamen Punkte mit der Fläche in doppelt unendlicher Mannigfaltigkeit auf ihr lägen. In unserem Falle der Fläche 5. Ordnung mit doppelter Raumkurve dritter Ordnung D^3 müssten aber die ∞^2 kubischen Raumkurven wegen ihrer sechs Punkte auf D^3 mit dieser identisch werden, d. h. auf unserer Fläche F_3^5 kommt dieses doppelt unendliche System kubischer Kurven nicht mehr zu stande.

Demzufolge ordnet sich also die Gesamtheit der kubischen Raumkurven unserer Fläche in zwei Systeme: ein end-

liches, dessen Kurven D^5 4 mal, und ein einfach unendliches, dessen Kurven D^3 5 mal treffen. Für beide Systeme haben wir im bisherigen Verlaufe Vertreter gefunden. Man kann aber noch weiter gehen und geradezu zeigen, dass jede Kurve des erstgenannten Systemes eine der vorhin gefundenen 462 einzelnen Kurven, jede Kurve des zweiten Systems eine solche aus einem der früheren elf Büschel sein muss; damit wäre dann zugleich bewiesen, dass es ausser den uns bekannten kubischen Raumkurven keine weiteren auf unserer Fläche geben kann.

Der Beweis der zweiten Behauptung gestaltet sich so: Ist R^3 eine der D^3 fünfmal treffenden Kurven, so denken wir uns durch beide eine Fläche 2. Ordnung gelegt, für deren Bestimmung sie zusammen die Bedeutung von $7 + 7 - 5 = 9$ Punkten haben, womit dieselbe eindeutig bestimmt ist. Ihre Restschnittkurve mit unserer Fläche ist von der Ordnung $2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 3 = 1$, also eine Gerade g der Fläche. Eine solche trifft, wie wir wissen, D^3 zweimal; und da R^3 und D^3 wegen ihrer fünf Begegnungspunkte zu den beiden verschiedenen Systemen kubischer Raumkurven auf der Fläche zweiter Ordnung gehören, muss g die Kurve R^3 einmal treffen. In der Tat kann man also jede Kurve R^3 des einfach unendlichen Systemes kubischer Kurven als Restschnitt einer Fläche 2. Ordnung durch D^3 und eine Gerade g der Fläche F_3^5 betrachten; das war aber die Definition, durch die früher die Kurven der elf Scharen eingeführt wurden.

Umständlicher gestaltet sich der Beweis der anderen Behauptung, dass jede kubische Kurve des endlichen Systems eine der vorhin gefundenen 462 einzelnen Kurven sein muss [1]). Zunächst ist klar, dass keine der kubischen Kurven des endlichen Systemes, „$Q^{3\prime\prime}$“, von einer Gerade g der Fläche zweimal getroffen werden kann, da sonst D^3, g, $Q^{3\prime}$ auf einer Fläche 2. Ordnung lägen, während doch Flächen

[1]) Wegen der zahlreichen Analogien zu den Ausführungen vor. No. in abgekürzter Form.

2. Ordnung durch g und D^3 kubische Kurven der anderen Art ausschneiden. Die elf Geraden der Fläche können also $Q^{3'}$ nur $0 =$ oder 1 mal schneiden. Wir machen nun im folgenden zwei Annahmen: Zuerst nehmen wir an, dass mehr als 6 Geraden, z. B. 7, $g_1, g_2 \ldots\ldots g_7$, Q^3 gar nicht träfen. Dann werden neben anderen die Kegelschnitte K_{12}, K_{34}, K_{56}, K_{71} von Q^3 zweimal getroffen (folgt aus den Flächen 2. Ordnung, durch die sie ausgeschnitten werden). Durch $Q^{3'}$ und D^3 gehen zusammen $\infty^{19-(10--10-4)} = \infty^3$ Flächen 3. Ordnung. Zur endgültigen Bestimmung einer solchen verbleiben also noch drei Punkte, von denen wir uns zwei auf K_{12}, einen auf K_{34} gelegt denken. Alsdann lassen sich für jeden der Kegelschnitte K_{12}, K_{34}, K_{56} sowie u. a. auch für K_{71} sieben Punkte angeben, die sie mit jener festen Fläche 3. Ordnung gemein haben nnd der sie somit ganz angehören müssen. Der volle Schnitt derselben mit unserer Fläche F^5_3 wäre also von höherer als der 15. Ordnung. Die Annahme, dass mehr als 6 Geraden die Kurve $Q^{3'}$ nicht treffen, ist also falsch.

Nun machen wir die zweite Annahme, dass weniger als 6 Geraden $Q^{3'}$ nicht treffen, m. a. W. dass mehr als fünf z. B. 6 Geraden $Q^{3'}$ einmal treffen. Dies seien g_1, $g_2, \ldots\ldots g_6$. Da g_4, g_5, g_6 die Kurve $Q^{3'}$ je einmal treffen, dürfen die zu je zwei von ihnen gehörigen Kegelschnitte K_{45}, K_{56}, K_{64}, wie wiederum aus den sie ausschneidenden Flächen 2. Ordnung folgt, $Q^{3'}$ gar nicht treffen, mithin begegnen deren Ergänzungskurven 3. Ordnung C^3_{45}, C^3_{56}, C^3_{64} der $Q^{3'}$ je dreimal. Ausserdem treffen die letzteren drei Kurven die drei Geraden g_1, g_2, g_3 je einmal, die Doppelkurve je dreimal. Für die Bestimmung einer Fläche 3. Ordnung haben also D^3, $Q^{3'}$, C^3_{45} die Bedeutung von $10 + 10 - 4 + 9 - 3 - 3 = 19$ Punkten, es geht also genau eine Fläche 3. Ordnung durch D^3, $Q^{3'}$, C^3_{45}; analog geht genau eine Fläche 3. Ordnung durch D^3, $Q^{3'}$, C^3_{56} und durch D^3, $Q^{3'}$, C^3_{64}. Jede dieser drei Flächen muss noch die drei Geraden g_1, g_2, g_3, mit denen sie alle vier Punkte gemein haben, enthalten.

Durch D^3, $Q^{3'}$, g_1, g_2, g_3 geht aber nur eine einzige Fläche 3. Ordnung hindurch, da diese Kurven für die Bestimmung einer solchen Fläche die Bedeutung von $10+10-4+3.1=19$ Punkten haben. Auf dieser einzigen Fläche 3. Ordnung müssten dann also die drei Kurven C^3_{45}, C^3_{56}, C^3_{64} gleichzeitig liegen, wodurch deren volle Schnittkurve aber von höherer als der 15. Ordnung würde.

Aus der Unmöglichkeit der beiden Annahmen folgt, dass jede Kurve $Q^{3'}$ des endlichen Systemes genau 6 Geraden der Fläche gar nicht trifft, die übrigen fünf also einmal. Und hieraus folgt dann weiter die Identität zweier Kurven $Q^{3'}$ und Q^3 (letztere eine Kurve der uns bekannten 462 einzelnen), welche sich in gleicher Weise gegen die 6+5 Geraden der Fläche verhalten: Denn in diesem Falle schneidet $Q^{3'}$ die Fläche 3. Ordnung, durch die wir uns früher Q^3 ausgeschnitten dachten, in $2+2-2-4=10$ Punkten, je zweimal auf drei Kegelschnitten, viermal auf D^3, gehört ihr also ganz an und muss daher mit Q^3 identisch sein.

Damit ist bewiesen, dass es auf unserer Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve keine anderen kubischen Raumkurven gibt als die der elf Büschel und die 462 einzelnen.

Besonderes Interesse bietet noch die Betrachtung der Bildkurven, welche den kubischen Raumkurven der Fläche gemäss der früher (§ 6) eingeführten Abbildung entsprechen. (Die genauere Begründung ergibt sich aus den dort angestellten ausführlicheren Betrachtungen). Wir beginnen mit der Abbildung der 462 einzelnen Kurven:

Die Ordnung der Bildkurve $Q^{3'}$ einer solchen Kurve Q^3 beträgt $4.3-4.2=4$; die Reduktion um 4.2 tritt ein wegen der vier Begegnungspunkte von Q^3 mit D^3. $Q^{3'}$ besitzt die Punkte A, B, C zu Doppelpunkten, weil Q^3 über die Kurven A^4_{II}, B^4_{II}, C^4_{II} je zweimal hinweggeht; denn Q^3 trifft den Kegel 2. Grades durch D^3, A^4_{II} 6 mal, darunter 4mal auf D^3, also noch zweimal auf A^4_{II}; und analog für B^4_{II}, C^4_{II}. Ausserdem geht die Bildkurve $Q^{3'}$ noch

durch die fünf Spurpunkte G_i der fünf von Q^3 einmal getroffenen Geraden g_i . Transformieren wir jetzt wieder wie früher dieses Feld in das Feld ε^* mit Hülfe einer dort angegebenen quadratischen Transformation, so geht die jetzige Bildkurve $Q^{3'}$ in eine solche der Ordnung $2.4—3.2 = 2$ also in einen Kegelschnitt über, welcher durch die fünf Punkte G_i^*, die den Punkten G_i zufolge der Transformation entsprechen, hindurchgeht.

Den 462 einzelnen Kurven Q^3 der Fläche entsprechen also in ε^* Kegelschnitte durch je fünf der elf Punkte G_i *.

Mit einem Schlage erhält man hieraus Aufschluss über die Treffverhältnisse irgend zweier Kurven Q^3 der Fläche; da nämlich zwei Bildkegelschnitte vier Punkte gemein haben müssen, von denen aber nur die von den Punkten G_i * verschiedenen auf gemeinsame Punkte zweier Kurven Q^3 der Fläche zurückzuführen sind, so folgt:

Zwei Kurven Q^3 treffen sich 0, 1, 2, 3, 4mal, je nachdem die beiden Quintupel der sie einmal treffenden Geraden in 4, 3, 2, 1, 0 Geraden übereinstimmen. (Vergl. Clebsch, Math. Ann. Bd. 1 S. 288).

Auch der Satz, das zwei Kurven Q^3 mit demselben Quintupel einmal getroffener Geraden identisch sind, folgt bei Betrachtung ihrer Bilder in ε^* ohne weiteres, da die beiden Kegelschnitte alsdann wegen fünf gemeinsamer Punkte Punkt für Punkt übereinstimmen.

Noch einfacher gestalten sich die Bildkurven der kubischen Raumkurven R^3 aus den elf einfach unendlichen Systemen.

Einer solchen Kurve R^3 entspricht in ε eine Bildkurve der Ordnung $4.3—5.2 = 2$ also ein Kegelschnitt. Derselbe besitzt A, B, C als einfache Punkte (entsprechend dem einen Begegnungspunkte von R^3 mit bezw. A^4_{II} , B^4_{II} , C^4_{II}) und geht auch noch durch einen der elf Punkte G_i , da R^3 eine und nur eine Gerade g_i der Fläche trifft. Die ∞^1 zu einer Gerade g_i gehörigen kubischen Kurven bilden sich also (in ε) in die Kegelschnitte eines Büschels

mit A, B, C, G_i als Grundpunkten ab. In ε^* wird aus diesem Büschel der Strahlenbüschel mit $G_i{}^*$ als Scheitelpunkt. Daraus kann man aber sofort die Treffverhältnisse zweier Kurven R^5 aus demselben und aus verschiedenen Büscheln ablesen, Resultate, die durch die früheren Untersuchungen bestätigt werden. Auch ergibt sich beispielsweise der Satz: Eine kubische Raumkurve R^3 begegnet einer kubischen Raumkurve Q^3 ein- oder zweimal, je nachdem ihre Stützgerade die Kurve Q^3 trifft oder nicht trifft.

25. Wie man sieht, ist das Verfahren, mit dessen Hilfe wir uns hier über die kubischen Raumkurven der Fläche Aufschluss verschafft haben, prinzipiell nicht verschieden von dem früheren, welches zur Ermittelung der Geraden diente. In der Tat lassen sich ja auch diese als Raumkurven vom Geschlecht 0 betrachten.

Zur Bestätigung früherer Ergebnisse mögen noch einmal kurz die Kegelschnitte der Fläche auf diesem Wege aufgesucht werden. Kegelschnitte gibt es im Raume ∞^8 (∞^5 in jeder der ∞^3 Ebenen); damit ein solcher auf unserer Fläche liege, muss er mit ihr $5.2 + 1 = 11$ Punkte gemeinsam haben. Auch hier zeigt sich, dass wir die Singularität der Fläche, ihre Doppelkurve in Anspruch nehmen müssen, wenn wir mit den nur 8 verfügbaren Bedingungen elf gemeinsame Punkte erzielen wollen. Und zwar tritt letzteres erst dann ein, wenn jene acht Bedingungen aus dem dreimaligen Treffen der Doppelkurve D^3 und dem einmaligen Treffen fünf weiterer, einfacher Kurven bestehen. Wegen der $3 + 5 = 8$ Bedingungen und der $3.2 + 5 = 11$ Schnittpunkte mit der Fläche erhalten wir so eine endliche Anzahl von Kegelschnitten unserer Fläche; dieselben müssen die Doppelkurve dreimal treffen.

Die Bildkurven der Kegelschnitte in ε^* sind die 55 Verbindungsgeraden der elf Punkte $G_i{}^*$.

Weiter fortschreitend kämen wir zu einem einfach unendlichen System von Kegelschnitten, wenn wir die D^3 vierfach und noch drei beliebige andere Kurven einfach treffenden Kegelschnitte betrachteten; einfach unendlich ist das

System wegen der nur sieben Bedingungen; wegen ihrer $4.2 + 3 = 11$ Treffpunkte müssen sie alle der Fläche angehören. Nun kann aber eine kubische Raumkurve, wie unsere Doppelkurve D^3 sie ist, von keinem Kegelschnitt viermal getroffen werden, wofern sie sich nicht in ihn und eine ihn einmal treffende Gerade zerspalten soll, was wir aber i. A. nicht annehmen. Und damit gewinnen wir einen tieferen Einblick darein, warum auf unserer Fläche 5. Ordnung mit einer kubischen Doppelkurve ein einfach unendliches System von Kegelschnitten nicht zu stande kommen kann.

§ 9.

Raumkurven 4. Ordnung 2. Art[1]).

26. Hinter den kubischen Raumkurven interessieren als die nächst einfacheren Kurven die Raumkurven 4. Ordnung 2. Art. Sie sind vom Geschlecht 0 und müssen daher dem bereits im vorigen Paragraphen angewandten Satze zufolge $5.4 + 1 = 21$ Punkte mit der Fläche gemein haben, um auf ihr zu liegen. Der Grad ihrer Mannigfaltigkeit im Raume beträgt[2]) 16, sie vermögen also ebensoviele einfache Bedingungen zu erfüllen.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze ist es leicht, sich über die verschiedenen Typen dieser Kurven auf unserer Fläche zu orientieren:

Erst diejenigen Kurven R^4_{II} des Raumes, welche die 16 Bedingungen erfüllen, fünfmal die Doppelkurve D^3 und elf andere beliebige Kurven der Fläche je einmal (natürlich stets in getrennten Punkten) zu treffen, haben mit der Fläche $2.5 + 11 = 21$ Punkte gemein und liegen folglich auf ihr. Wegen der 16 Bedingungen erhalten wir in ihnen ein (erstes) endliches System von Kurven R^4_{II}. Sie treffen D^3 je fünfmal.

[1]) Die Betrachtungen der §§ 9, 10 stehen mit dem späteren nicht in Zusammenhang.

[2]) Sturm, Journ. für Math. Bd. 88, S. 234, 235.

Die einfach unendlich vielen Kurven, welche D^3 sechsmal und nur noch neun andere Kurven der Fläche je einmal treffen, haben mit ihr $2.6 + 9 = 21$ Punkte gemein und liegen auf ihr. Sie bilden in ihrer Gesamtheit ein zweites System von Kurven R^4_{II}.

Ein weiteres, drittes System ergibt sich durch die ∞^2 Kurven, welche die 14 Bedingungen erfüllen, D^3 siebenmal und noch sieben andere Kurven je einmal zu treffen; wegen ihrer $7.2 + 7 = 21$ Schnittpunkte mit der Fläche gehören sie ihr in der Tat an.

Der nächste Schritt würde zu Kurven R^4_{II} führen, welche D^3 8mal träfen. Das ist aber nicht möglich: Eine kubische Raumkurve z. B. D^3 kann von einer Raumkurve 4. Ordnung II. Art R^4_{II} höchstens in sieben Punkten getroffen werden. Denn gesetzt, es lägen zwei solche Kurven mit acht Begegnungspunkten vor, so hätten sämtliche ∞^1 Flächen 2. Ordnung durch D^3, welche noch einen Punkt der R^4_{II} enthielten, mit dieser dann $8 + 1 = 9$ Punkte gemein und müssten sie ganz enthalten, während doch durch eine solche Kurve R^4_{II} immer nur eine Fläche 2. Ordnung hindurchgeht.

Es gibt mithin auf unserer Fläche F_3^5 genau drei Systeme von Kurven R^4_{II}:

1) ein endliches, dessen Kurven D^3 5 mal treffen.

2) ein einfach unendliches, dessen Kurven D^3 6mal treffen.

3) ein doppelt unendliches, dessen Kurven D^3 7mal treffen.

27. Wir betrachten zunächst das letztgenannte System: Die eine Fläche 2. Ordnung, welche durch eine Kurve R^4 desselben hindurchgeht, muss wegen ihrer sieben Begegnungspunkte mit D^3, diese von selbst enthalten, sodass eine solche Kurve R^4 und so jede dieses Systemes als Restschnitt einer Fläche 2. Ordnung durch D^3 mit unserer Fläche F_3^5 aufgefasst werden darf.

Damit ergibt sich dieses doppelt unendliche System als identisch mit dem uns bereits bekannten, welches früher in § 2 behandelt wurde.

Seine Kurven bilden sich in der Ebene ε ab in Kurven von der Ordnung $4.4 - 7.2 = 2$, also in Kegelschnitte, welche A, B, C zu $8 - 7 = 1$fachen Punkten haben. In ε^* gehen sie über in die Geraden dieses Feldes.

Zu den Kurven des 2. Systemes gelangt man so: Man denke sich durch D^3, eine ebene Kurve 3. Ordnung C_{34}^3 und zwei von den neun sie treffenden Geraden, g_1 und g_2, eine Fläche 3. Ordnung gelegt. Der Ergänzungsschnitt von C_{34}^3 sei der Kegelschnitt K_{34} mit g_3 und g_4 als Stützgeraden. Für die Bestimmung der Fläche sind die angegebenen Kurven äquivalent $10 + 9 + 4 + 4 - 3 - 2.2 - 2.1 = 18$ Punkten, wobei die mit negativem Vorzeichen versehenen Zahlen auf die Begegnungspunkte von bezw. C_{34}^3, D^3; $(g_1, g_2)\ D^3$; $(g_1, g_2)\ C_{34}^3$ zurückzuführen sind. Es ist also ein ganzer Büschel von Flächen 3. Ordnung bestimmt; durch jeden Punkt unserer Fläche F_3^5 geht i. A. eine Fläche F^3 und somit eine Kurve des Restschnittgebildes. Die Ordnung desselben ist gleich $5.3 - 2.3 - 3 - 2.1 = 4$. $g_5, \ldots g_{11}$ seien die noch fehlenden sieben Geraden der Fläche; sie treffen zusammen mit g_1 und g_2 C_{34}^3 je einmal. Da $g_5, \ldots g_{11}$ die Grundkurve unseres Flächenbüschels 3. Ordnung (bestehend aus D^3, C_{34}^3, g_1, g_2) je dreimal, g_3 und g_4 dieselbe je zweimal treffen, würde es weiterer bestimmender Punkte bedürfen, wenn eine Fläche des Büschels eine von ihnen enthalten sollte. Demgemäss werden diese Geraden i. A. nicht Bestandteile des Restschnittkurvengebildes 4. Ordnung, R^4, bilden. $g_5, \ldots g_{11}$ treffen eine beliebige R^4 keinmal, g_3 und g_4 eine solche einmal.

Zur Ermittlung der Zahl der Begnungspunkte der Kurven R^4 mit D^3 wenden wir hier einmal folgendes allgemeinere Verfahren an, das uns auch in späteren, ähnlichen Fällen zum Ziele führen wird:

Wir denken uns durch die Doppelkurve D^3 unserer Fläche ein Fläche 3. Ordnung M^3 hindurchgelegt, die ja noch in einer Raumkurve 9. Ordnung R^9 schneidet. Da D^3 von 6 Geraden der kubischen Fläche M^3 zweimal, von 15 einmal, von 6 keinmal getroffen wird, wird R^9 von 6 Ge-

raden $5 - 2.2 = 1$ mal, von 15 $5 - 1.2 = 3$ mal, von 6 $5 - 0 = 5$ mal getroffen und ist also nach Sturm, Math. Ann. Bd. 21 S. 495 die bei $n = 9$ unter 10 beschriebene Kurve zweiter Art vom Geschlecht 6; sie besitzt $h = 22$ scheinbare Doppelpunkte. Ihr Rang r folgt aus der Cayleyschen Formel $r = n(n-1) - 2h$ als $9.8 - 2.22 = 28$.

Die Anzahl der Treffpunkte dieser von M^3 ausgeschnittenen Restkurve R^9 mit der Doppelkurve D^3 ergibt sich (ähnlich wie früher bei den Kurven R^4_{II}, die von Flächen 2. Ordnung durch D^3 ausgeschnitten wurden,) unter Heranziehung noch einer zweiten, ebenfalls durch D^3 gehenden kubischen Fläche $M^{3\prime}$: M^3 und $M^{3\prime}$ haben ausser der ihnen bereits gemeinsamen kubischen Raumkurve D^3 noch eine Raumkurve 6. Ordnung vom Range 16, $R_{16}{}^6$, gemeinsam, welche D^3 achtmal begegnet (Sturm, Flächen 3. Ordnung S. 204, 205). Da diese R^6_{16} unsere Fläche $F_3{}^5$ in $6.5 = 30$ Punkten schneiden muss, von denen acht bereits auf D^3 liegen, verbleiben noch $30 - 2.8 = 14$ ausserhalb derselben gelegene; d. h. die drei Flächen $F_3{}^5$, M^3 und $M^{3\prime}$ haben ausser der ihnen gemeinschaftlichen Kurve D^3 noch 14 einzelne Punkte gemeinsam oder: die zu M^3 gehörige Restschnittkurve R^9 schneidet $M^{3\prime}$ in 14 Punkten ausserhalb D^3; und da sie zusammen in 27 Punkten schneiden muss, muss sie $27 - 14 = 13$mal auf D^3 treffen. Wir gelangen damit zu dem allgemeinen Ergebnis:

Die Restschnittkurve 9. Ordnung R^9, welche von einer durch die Doppelkurve D^3 unserer Fläche hindurchgehenden kubischen Fläche ausgeschnitten wird, begegnet der Kurve D^3 13mal. Wenn insbesondere R^9 zerfällt, muss die Summe der Begegnungspunkte ihrer Bestandteile gleich 13 sein. (Dies liefert für zwei früher in § 4 und § 8 angestellte Kurvenuntersuchungen eine wichtige Kontrolle.)

Im vorliegenden Falle, wo D^3 von g_1 und g_2 je zweimal, von $C_{34}{}^3$ dreimal getroffen wird, folgt, dass unsere Kurven R^4 der Doppelkurve $13 - 2.2 - 3 = 6$mal begegnen.

Ferner treffen die Kurven R^4 als Kurven von F^3 deren vollen ebenen Schnitt $C_{34}{}^3$ viermal. Da nun irgend eine Fläche F^3 des Büschels der Restkurve R^4 einer anderen Fläche in $3.4 = 12$ Punkten begegnet, und, wie wir jetzt wissen, von diesen sechs auf D^3, vier auf $C_{34}{}^3$ entfallen, müssen die beiden fehlenden auf g_1 und g_2 zu liegen kommen, auf die sie sich wegen der Gleichartigkeit des Auftretens dieser beiden Geraden verteilen. Mithin treffen die Kurven R^4, g_1 und g_2 je einmal; von den insgesamt elf Geraden der Fläche treffen sie also 4 einmal, 7 keinmal.

C^3_{34}, g_1, g_2 bilden zusammen mit einer der Kurven R^4 das Restschnittgebilde 9. Ordnung R^9 einer durch D^3 gehenden kubischen Fläche, dessen Rang wir vorhin als 28 erkannten. Von dem Gesamtgebilde spalten sich hier also ausser R^4 noch ab C^3_{34} mit dem Rang 6, g_1, g_2 mit dem Rang 0. Berücksichtigt man ausserdem, dass jeder Begegnungspunkt zweier dieser Kurven als Doppelpunkt der vollständigen Kurve R^9 deren Rang um zwei vermindert, so erhalten wir als Rang unserer Kurven R^4 $28-6-2.4-2.1-2.1-2.1-2.1 = 6$; sie sind also von der zweiten Art.

Ein anderer Weg ist der: Durch eine bestimmte Kurve R^4, sowie ferner C^3_{34}, g_1, g_2, D^3 geht genau eine kubische Fläche; die Kurven haben für deren Bestimmung die Bedeutung von 19 Punkten. Ist x die Zahl der Bedingungen, die man der kubischen Fläche auferlegt, damit sie R^4 enthalte, so besteht unter Berücksichtigung der Begegnungspunkte die Gleichung

$$19 = x + 10 + 9 + 2.4 - 2.2 - 3 - 6 - 2.1 - 2.1 - 4;$$

es folgt $x=13$; R^4 ist von der zweiten Art.

Somit führt das eingangs beschriebene Verfahren auf einfach unendlich viele Raumkurven $R^4{}_{II}$, welche D^3 in sechs Punkten treffen. Durch die 55 ebenen Kurven 3. Ordnung und irgend zwei ihrer neun sie einmal treffenden Geraden erhalten wir anscheinend $55.\frac{9.8}{1.2}$ Flächenbüschel 3. Ordnung, welche Büschel von Kurven 4. Ordnung $R^4{}_{II}$

der soeben betrachteten Art ausschneiden. Es bereitet aber keine besonderen Schwierigkeiten, nachzuweisen, dass jedes bestimmte Büschel solcher Kurven R^4_{II} sich auffassen lässt als Gesamtheit der Restschnitte eines Flächenbüschels 3. Ordnung, welches D^3, irgend zwei der vier von den R^4 einmal getroffenen Geraden ($g_1 \ldots g_4$), sowie die Ergänzungskurve 3. Ordnung des Kegelschnittes der anderen beiden als Grundkurve hat.

Darnach reproduziert sich also jedes Kurvenbüschel $\frac{4.3}{1.2} = 6$ mal und die Zahl der hier erhaltenen Büschel von R^4_{II} beträgt in Wirklichkeit nur $55 . \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{1}{6} = 330$[1])

In irgend einem beliebigen dieser Büschel wird es unter seinen einfach unendlich vielen Kurven eine endliche Anzahl von solchen geben, welche einen Doppelpunkt besitzen, diejenigen, deren ausschneidende Fläche 3. Ordnung unsere Fläche F_3^5 einmal berührt. Raumkurven 4. Ordnung 2. Art können aber keinen Doppelpunkt besitzen, ohne zu zerfallen. Die alsdann sich ergebenden Kurvengebilde sind, wenn die Bezeichnungsweise des vorhin betrachteten Büschels zu Grunde gelegt wird, entweder zwei einander einmal begegnende Kegelschnitte (K_{12}, K_{34}); (K_{13}, K_{24}), (K_{14}, K_{23}) oder eine der sieben von der R^4_{II} 0mal getroffenen Geraden g_5, $g_6 \ldots g_{11}$ und diejenige der 462 einzelnen kubischen Raumkurven, welche die sechs übrigen unter diesen 0mal trifft.

Da, wie bekannt, ein Kegelschnitt unserer Fläche von 36 anderen einmal getroffen wird, gibt es im ganzen $\frac{55.36}{1.2}$ Dupel sich einmal begegnender Kegelschnitte; von diesen kommen in jedem Büschel, wie soeben gesehen, drei vor und es besteht mithin die Kontrolle, dass $\frac{55.36}{1.2} \cdot \frac{1}{3}$ gleich der Anzahl der Büschel unserer Kurven R^4_{II} d. i. gleich 330 sein muss, was durch die Ausrechnung bestätigt wird. Auch

[1]) Dies sind die von Sturm in Math. Ann. Bd. 4. S. 274 mit Q^4 bezeichneten Kurven.

der andere Fall ergibt eine Kontrolle. Jede der sieben Geraden $g_5, \ldots, g_{11}$ führt, wenn man eine von ihnen auswählt, eindeutig zu dem Sextupel der sechs übrigbleibenden d. h. zu einer Kurve Q^3, welche diese 0mal trifft. In jedem der 330 Büschel von Kurven R^4 gibt es also sieben in eine Gerade und eine Kurve Q^3 ausgeartete, in allen 330 Büscheln zusammen also 7.330. Andererseits muss dies gerade die Anzahl der Fälle sein, wie oft man eine der 462 Kurven Q^3 mit einer der fünf sie einmal treffenden Geraden zusammenstellen kann. Es muss also gelten: $7.350 = 5.462$, was wiederum durch Ausrechnung bestätigt wird.

Die beiden anderen Ausartungen einer Raumkurve 4. Ordnung 2. Art in eine kubische Raumkurve R^3 eines der elf Büschel mit ihrer sie einmal treffenden Stützgerade oder in einen Kegelschnitt mit seinen beiden zu einander windschiefen Stützgeraden sind bereits früher als Spezialfälle der Kurven R^4_{II} des doppelt- unendlichen Systemes erkannt und behandelt worden. Da aber jedes einfach unendliche System von Kurven R^4_{II} notwendig zu einer endlichen Anzahl von Ausartungen führen muss, und solche nun nicht mehr vorhanden sind, muss in den hier erhaltenen 330 Büscheln von Kurven R^4_{II} das einfach unendliche System derselben erschöpft sein.

Die Bildkurven der Kurven eines Büschels ergeben sich so: In ε beträgt ihre Ordnung $4.4 - 6.2 = 4$. A, B, C sind $8 - 6 = 2$ fache Punkte. Dies gibt in ε^* Kurven von der Ordnung $2.4 - 3.2 = 2$, also Kegelschnitte. Da die Kurven R^4_{II} des Büschels vier Geraden der Fläche (die vorhin mit $g_1 \ldots g_4$ bezeichneten) einmal treffen, müssen ihre Bildkurven in ε^* $G_1^*, \ldots G_4^*$ je einmal enthalten, d. h. die Bildkurven bilden in ε^* die Kegelschnitte eines Büschels.

Kurven des dritten, noch fehlenden, endlichen Systemes kommen so zu stande:

Wir legen eine Fläche 3. Ordnung durch die Doppelkurve D^3, eine der 462 einzelnen kubischen Kurven Q^3 und noch zwei Geraden der Fläche, von denen die eine, g_7, Q^3 einmal, die andere, g_t, die-

selbe keinmal trifft. Für die Bestimmung der Fläche 3. Ordnung sind diese Kurven äquivalent $10 - 10 + 4 + 4 - -4 - 2 \cdot 2 - 1 = 19$ Punkten, legen sie also eindeutig fest; und da die Kurven Q^3 sowie die Geraden der Fläche doch nur in endlicher Anzahl auf ihr liegen, lässt sich auch nur eine endliche Anzahl von Flächen 3. Ordnung in dieser Weise legen, wodurch dann auch nur eine endliche Anzahl von Restschnittkurven zu stande kommen, deren Ordnung $5 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 - 2 \cdot 1 = 4$ beträgt. Aus einem vorhin gefundenen Satze, demzufolge R^4, Q^3, g_1, g_7 die Doppelkurve D^8 zusammen 13mal treffen müssen, ergibt sich, dass R^4 allein ihr $13 - 4 - 2 \cdot 2 = 5$mal begegnet. Hieraus folgt übrigens, dass die erhaltenen Kurven R^4 nicht etwa in solche niederer Ordnung zerfallen, da dann die Zahl der Begegnungspunkte mit D^8 grösser als fünf sein müsste.

Die Betrachtungen, welche nunmehr zur Feststellung der Art der Kurven und ihres Verhaltens zu den Geraden der Fläche erforderlich wären, sind den entsprechenden Betrachtungen bei dem soeben behandelten System soweit ähnlich, dass sie zur Vermeidung umständlicher Wiederholungen unterdrückt werden mögen. Die im Verlaufe der Untersuchungen sich ergebenden Resultate sind folgende: R^4 wird von den noch fehlenden fünf, Q^3 keinmal begegnenden Geraden ($g_2 \ldots g_6$) einmal, von den noch fehlenden vier, Q^3 einmal begegnenden Geraden ($g_8 \ldots g_{11}$) keinmal getroffen. Weiter trifft R^4 die g_1 zweimal, g_7 einmal, Q^3 fünfmal.

Wie beim einfach unendlichen Systeme folgt mit Hilfe der Kurven Q^3, g_1, g_7 unter Berücksichtigung der Begegnungspunkte, die sie untereinander und mit R^4 besitzen, der Rang der letzteren als $28 - 4 - 5 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 6$, womit die hier erhaltenen Kurven R^4 als von der 2. Art erkannt sind.

Wenn eine zweite Kurve $R^{4'}$ unseres jetzigen, endlichen Systemes sich in derselben Weise zu den elf Geraden der Fläche verhielte, wie die bisher betrachtete R^4, so müsste eine solche die Kurve Q^3 auch fünfmal treffen; dies folgt

aus der Fläche 3. Ordnung, durch die Q^3 ausgeschnitten wird. $R^{4\prime}$ hätte dann mit der Fläche 3. Ordnung, welche R^4 ausschneidet, $5 + 5 + 1 + 2 = 13$ Punkte gemein (bzw. auf D^3, Q^3, g_7, g_1 gelegen), weshalb sie ihr angehören und mit R^4 identisch sein müsste. Die Kurven R^4_{II} unseres Systems müssen sich also sämtlich gegen die Geraden der Fläche verschieden verhalten und betragen daher, weil sie 6 Geraden einmal, 4 keinmal, 1 zweimal treffen, ihrer Zahl nach

$$\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}5 = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.7 = 2310.$$

Hiernach bleibt freilich noch die Möglichkeit, dass es noch eine weitere endliche Anzahl von Kurven R^4_{II} gibt, die gleichfalls D^3 fünfmal treffen und die erst, zusammen mit den soeben gefundenen 2310 das endliche System erschöpfen.

Die Bildkurven gestalten sich hier folgendermassen: Ihre Ordnung beträgt $4\cdot4 - 5\cdot2 = 6$; A, B, C sind $8 - 5 = 3$fache Punkte. Daraus ergeben sich in ε^* Bildkurven von der Ordnung $2\cdot6 - 3\cdot3 = 3$, also Kurven dritter Ordnung. Da die Kurven R^4_{II} auf der Fläche von den elf Geraden 6 einmal, 1 zweimal, 4 keinmal treffen, besitzen die ebenen kubischen Bildkurven in ε^* einen der Punkte G^*_i als Doppelpunkt und gehen ausserdem noch durch 6 andere Punkte G^*_i hindurch.

---

§ 10.

Raumkurven 4. Ordnung 1. Art.

28. Nach dem oben (Nr. 24 S. 58) besprochenen Satze, dass eine Raumkurve q. Ordnung vom Geschlecht 1 auf einer Fläche n. Ordnung liegt, wenn sie mit ihr $nq + 1 - 1 = nq$ Punkte gemein hat, wird es bei den Raumkurven 4. Ordnung 1. Art, die ja bekanntlich das Geschlecht 1 haben, 20 gemeinsamer Punkte bedürfen, damit sie auf unsere Fläche F_3^5 zu liegen kommen. Wegen der Mannigfaltigkeit ∞^{16}

dieser Kurven[1]) wird es i. A. keine geben, welche 20 beliebig gewählte Kurven unserer Fläche je einmal in getrennten Punkten oder einzelne von ihnen xfach treffen, die dann als xfache Bedingung zählen. Erst dann, wenn die 16, von den gesuchten Kurven erfüllbaren Bedingungen aus 12 beliebigen Kurven der Fläche und der viermal zu treffenden Doppelkurve D^3 bestehen, wird sich eine endliche Anzahl ergeben, welche wegen ihrer $12 + 2.4 = 20$ Schnittpunkte mit der Fläche ganz auf ihr verlaufen. Wir gelangen damit zu einem ersten, endlichen System von Kurven R^4_I welche D^3 4 mal treffen.

Weiter wird es einfachunendlich viele Kurven R^4_I geben, welche die 15 Bedingungen erfüllen, 10 beliebige Kurven der Fläche je einmal, die Doppelkurve 5 mal zu treffen und die ersichtlich auch auf der Fläche liegen; sie bilden ein zweites System. Schliesslich müsste es noch ein drittes System von ∞^2 Kurven R^4_I, welche D^3 6 mal treffen, auf der Fläche geben.

Weiter dürfen wir nicht gehen, da eine kubische Raumkurve, wie D^3 sie ja ist, von keiner (allgemeinen) R^4_I in 7 Punkten getroffen werden kann[2]). Aber auch schon das dritte System D^3 6 mal treffender Kurven kann auf unserer Fläche $F_3{}^5$ nicht in voller Allgemeinheit zu stande kommen. Denn gäbe es solche Kurven R^4_I, so müsste die eine Fläche 2. Ordnung, welche durch sie und noch einen siebenten Punkt von D^3 hindurchginge, auch diese enthalten, während doch, wie bekannt, eine durch D^3 gehende Fläche 2. Ordnung unsere Fläche noch in einer Kurve R^4_{II} schneiden muss. Aus diesem doppelt unendlichen System können ohne Widerspruch nur die in endlicher Zahl vorhandenen Kurven bestehen, welche noch die zweifache Bedingung erfüllen, zwei Doppelpunkte zu besitzen und in

[1]) Sturm, Journ. für Math. Bd. 88. S. 234 u. 235.

[2]) Denn die kubische Raumkurve müsste wegen 7 gemeinsamer Punkte allen den ∞^1 Flächen 2. Ordnung, die durch R^4_I gehen, angehören, d. h. ein Bestandteil der Grundkurve sein, R^4_I also zerfallen.

eine kubische Raumkurve mit Doppelsekante zu zerfallen: Es sind die Kurvengebilde $(D^3 g_1)$, $(D^3 g_2)$, ... $(D^3 g_{11})$, die sich ja als Raumkurven R^4_1 mit 6 Treffpunkten (u. z. ihrer kubischen Bestandteile) auf D^3 auffassen lassen.

29. Kurven des einfach unendlichen Systemes ergeben sich so: Man lege durch die Doppelkurve D^3, eine kubische Raumkurve R^3 eines der elf Büschel (Stützgerade g) sowie einen diese einmal treffenden Kegelschnitt K_{12} (Stützgeraden g_1, g_2) eine Fläche 3. Ordnung F^3. Wegen des einmaligen Treffpunktes T von R^3 und K_{12} müssen g_1 und g_2 von g verschieden sein (Nr. 13). Für die Bestimmung einer Fläche 3. Ordnung haben die genannten Kurven die Bedeutung von $10 + 10 - 5 + 7 - 3 - 1 = 18$ Punkten, es gehen also ∞^1 Flächen durch sie hindurch, welche unsere Fläche $F_3{}^5$ je noch in einer Kurve R^4 schneiden müssen.

Von der Grundkurve des kubischen Flächenbüschels besitzen wir erst ein Gebilde 8. Ordnung, bestehend aus D^3, R^3, K_{12}; es fehlt also noch eine Gerade, j. R^3, K_{12}, j müssen zusammen eine Kurve R^6_{16} bilden, die D^3 8 mal trifft; j selbst muss also die D^3 $8-5-3 = 0$ mal treffen. Andererseits müssen aber auch D^3, K_{12}, j eine Kurve R^6_{16} bilden, welche R^3 8 mal trifft; j selbst muss also die R^3 $8-5-1 = 2$ mal treffen. Träfe j den Kegelschnitt K_{12} weniger als zweimal, so könnte sie nicht von selbst allen durch D^3, R^3, K_{12} gehenden kubischen Flächen angehören, da sie ihnen dann in noch nicht vier Punkten begegnete. Also trifft j die Kurven R^3 und K_{12} je zweimal und ist mithin diejenige Gerade, welche die beiden von T verschiedenen Spurpunkte von R^3 in dieser Ebene verbindet; sie begegnet unserer Fläche F^5_3 4 mal in Punkten der Kurven R^3 und K_{12}, also noch ein fünftes Mal in einem weiteren Punkte, S, durch den dann notwendig alle Restkurven R^4 des erhaltenen Büschels hindurchgehen müssen.

Wir werden späterhin für den gemeinschaftlichen Punkt S der Kurven eines solchen Büschels eine Bestätigung durch ihre Abbildung erhalten.

Die für die Erkenntnis des Charakters der hier sich ergebenden Kurven R^4 notwendigen Betrachtungen vereinfachen sich dadurch erheblich, dass wir bereits wissen, das alle durch D^3 und eine R^3 eines der elf Büschel gehenden Flächen 3. Ordnung als Restschnitt eine Kurve R^6_{16} ausschneiden, deren wesentliche Eigenschaften bereits früher (Nr. 14) gefunden worden sind. In unserem Falle muss also der Kegelschnitt K_{12} zusammen mit der zu untersuchenden Kurve R^4 eine zerfallende Kurve R^6_{16} bilden. Eine solche trifft, wie wir wissen, die Doppelkurve D^3 achtmal, und da K_{12} sie dreimal trifft, muss R^4 sie $8-3=5$ mal treffen. (Als Kontrolle dient die Gleichheit $13=5\cdot 5+3$.) Ferner trifft eine Kurve R^6_{16} die Kurve R^3, mit deren Hilfe sie erzeugt wird, 4 mal; und da hier K_{12} sie einmal trifft, muss R^4 die R^3 3 mal treffen.

Die drei Geraden g, g_1, g_2, welche mit D^3, R^3, K_{12} insgesamt drei Punkte gemein haben, werden einer beliebigen Fläche 3. Ordnung durch diese Kurven i. A. nicht angehören, können also eine beliebige der Restschnittkurven R^4 nicht treffen. Hingegen müssen die übrigen acht Geraden der Fläche R^4 je einmal schneiden.

Aus der Fläche 2. Ordnung durch D^3, K_{12}, g_1, g_2, folgt, dass R^4 den Kegelschnitt K_{12} dreimal trifft.

Da nun, wie gesagt, R^4 mit K_{12} eine zerfallende Kurve R^6_{16} bildet, der Rang von K_{12} aber 2 beträgt und ausserdem jeder Doppelpunkt den Rang einer Raumkurve um 2 vermindert, muss der Rang einer solchen Kurve R^4 $16-2-3\cdot 2=8$ betragen; die gefundenen Kurven R^4 sind also in der Tat solche der 1. Art.

Anscheinend ergeben sich vermittelst der ∞^1 Flächen 3. Ordnung durch jede der ∞^1 kubischen Kurven R^3 des zu einer Gerade g gehörigen Büschels sowie durch K_{12} insgesamt $\infty^{1+1}=\infty^2$ Restschnittkurven R^4_1. Es ist aber bereits früher (Nr. 14 S. 33, 34) gezeigt worden, dass die ∞^1 Flächen 3. Ordnung, welche sich durch D^3 und eine R^6_{16} (hier D^3, K_{12} und eine R^4_1) legen lassen, noch die ∞^1 kubischen Raumkurven eines und desselben Büschels ausschneiden;

d. h, in unserem speziellen Falle kommt jede Kurve R^4_I bei jeder Kurve R^3 des zu g gehörigen Büschels, im ganzen also ∞^1 mal zu stande[1]) und ihre Mannigfaltigkeit beträgt daher nur ∞^1.

Wir sind damit also tatsächlich zu einer Art von Kurven R^4_I gelangt, wie wir sie vorhin auf Grund allgemeinerer Erwägungen als „Kurven des 2. Systemes" erschlossen haben.

Die Erzeugung unserer Kurven R^4_I stützte sich auf eine kubische Raumkurve eines der elf Büschel (gehörig zu einer Gerade g) und einen der 45, ihr einmal begegnenden Kegelschnitte (gehörig zu g_1 und g_2). Sie trafen g, g_1, g_2 keinmal; die übrigen acht Geraden je einmal. Die naheliegende Vermutung, dass, wenn g, g_1, g_2 bei der Erzeugung ihre Rolle vertauschen, sich dieselben Kurven ergeben, findet ebenso wie in den früheren Fällen auch hier ihre Bestätigung: Durch eine der erhaltenen Kurven R^4_1, D^3, irgend eine der an g_1 (bezw. g_2) hängenden kubischen Raumkurven und den eine solche einmal treffenden Kegelschnitt K_{02} (bzw. K_{01}) geht genau eine Fläche 3. Ordnung, sodass folglich der erhaltene Büschel von R^4_I dreimal in der eingangs angegebenen Weise zustande kommt. Demgemäss gibt es gerade $\frac{11 \cdot 45}{3} = 165$ solcher Büschel von Kurven R^4_I.

Ob diese 165 Büschel mit ihren ∞^1 Kurven das einfach unendliche System der Kurven R^4_I erschöpfen, würde auch hier einer besonderen Untersuchung bedürfen. In jedem der Büschel gibt es drei Kurven, welche in eine ebene Kurve 3. Ordnung C^3 und sie einmal treffende Gerade zerfallen; da C^3 deren neun besitzt, folgt als Kontrolle die Gleichung $\frac{55 \cdot 9}{3} = 165$. Die Bildkurven der Kurven eines Büschels

[1]) Insbesondere auch bei einer solchen, welche aus einem g treffenden Kegelschnitt und dessen anderer Stützgerade besteht. Aus dieser Entstehungsweise folgt dann aber die Identität der in Rede stehenden Kurven mit den von Sturm Math. Ann. Bd. 4. S. 275 als V^4 bezeichneten.

sind von der Ordnung $4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 6$ und besitzen A, B, C zu $8 - 5 = 3$ fachen Punkten. Daraus werden in der Bildebene ε^* vermittelst unserer quadratischen Transfomation Kurven von der Ordnung $2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 3$, also ebene kubische Kurven. Diese gehen, da die Kurven R^4 acht Geraden der Fläche je einmal, die übrigen gar nicht treffen, durch 8 der Punkte G^*_i einmal hindurch; sie haben also sämtlich notwendig noch einen neunten Punkt S^* gemeinsam, den zu jenen acht assoziierten, welcher lehrt, dass auch die Kurven R^4 eines Büschels auf der Fläche sämtlich einen Punkt S gemeinsam haben. Wir kommen damit zu dem Punkt S zurück, den wir bereits vorhin gelegentlich auf direktem Wege, aber durch umständliche Betrachtung gewonnen haben. Auch bei dieser Gelegenheit zeigt sich, um wieviel übersichtlicher sich die Verhältnisse in der Bildebene ε^* gestalten.

Ein Beispiel für die noch fehlenden Kurven R^4_1 des endlichen Systems liefern die Restschnittkurven der Flächen 3. Ordnung, welche durch D^3, eine kubische Raumkurve R^3 eines der elf Büschel und noch zwei, von deren Stützgerade g verschiedene Geraden g_1, g_2 der Fläche hindurchgelegt sind. Sie haben für die Bestimmung einer Fläche 3. Ordnung die Bedeutung von $10+10+4+4-5-2-2 = 19$ Punkten, legen sie also eindeutig fest. Der Restschnitt ist von der Ordnung $5.3-2.3-3-2.1 = 4$, eine R^4. Ähnlich wie bei dem letztbehandelten System bilden hier R^4, g_1, g_2 eine R^6_{16}. Wegen der je zwei Treffpunkte von g_1, g_2 mit D^3 muss also R^4 die D^3 $8-2.2 = 4$ mal treffen. (Als Kontrolle besteht die Gleichung $4 + 5 + 2.2 = 13$). Da R^4, g_1, g_2 zusammen als R^6_{16} die Kurve R^3 4 mal treffen und g_1, g_2 dies nicht tun, ergeben sich 4 Begegnungspunkte von R^4 mit R^3. Aus den Flächen 2. Ordnung durch D^3, R^3, g und D^3, g_1, g_2, K_{12} folgt, dass R^4 die Gerade g 0mal, g_1 und g_2 zusammen 4 mal, jede einzeln also wegen der Gleichartigkeit ihres Auftretens 2 mal trifft (denn K_{12} trifft R^4

0mal). Aus dem Gesagten folgt, dass R^4 sich in keiner Weise aus den noch übrigen acht Geraden der Fläche, g_3, $g_4 \ldots g_{10}$ zusammensetzen darf; dieselben müssen R^4 je einmal treffen. Da g_1, g_2 als Geraden den Rang 0 haben und jeder Doppelpunkt einer Raumkurve deren Rang um zwei vermindert, beträgt der Rang der neu gefundenen Kurve R^4 $16-2.2.2=8$, dieselbe ist also eine R^4 I. Art.

Wie man leicht sieht, kommt die betrachtete Kurve $R^4_{I.}$ nicht bloss bei einer bestimmten R^3 aus dem Büschel g, sondern bei jeder Kurve desselben zustande, reproduziert sich also ∞^1 mal; und damit ist ihre Gesamtzahl auf der Fläche als nur endlich erkannt.

Da wir die kubische Kurve R^3 aus jedem der elf Büschel, g_1 und g_2 dann noch auf $\frac{10.9}{1.2}$ Weisen wählen können, wodurch jedesmal eindeutig eine Kurve R^4 der betrachteten Art bestimmt ist, gibt es deren insgesamt $11.\frac{10.9}{1.2} = 495$ auf unserer Fläche. Diese 495, die Doppelkurve D^3 4 mal treffenden Raumkurven $R^4_{I.}$ bilden eine Kategorie der Kurven des vorhin durch allgemeine Betrachtungen erschlossenen endlichen Systemes.

Ihre Bildkurven in ε sind von der Ordnung $4.4-4.2=8$ mit A, B, C als $8-4=4$ fachen Punkten. In ε^* gibt dies Kurven der Ordnung $2.8-3.4=4$. Da die Kurven R^4 zwei Geraden der Fläche zweimal, acht einmal, eine garnicht treffen, haben ihre Bildkurven 4. Ordnung in ε^* zwei der Punkte G^*_i zu Doppelpunkten und acht weitere von ihnen zu einfachen Punkten.

Aus der Abbildungsebene ε^* kann man die Zahl der Begegnungspunkte irgend zweier der im vorhergehenden behandelten Kurven der Fläche leicht herauslesen.

Zur Orientierung folge noch eine tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten der im vorhergehenden behandelten Kurven unserer Fläche F_3^5:

Art der Kurve	Zahl bezw. Mannigfaltigkeit derselben.	Zahl ihrer Begegn.-punkte mit d. Doppelkurve D^3.
Geraden	11	2
Kegelschnitte	55	3
Kubische Raumkurven	11 einfach unendl. Systeme	5
	462 einzelne	4
Raumkurven 4. Ordnung II. Art.	1 doppelt unendl. System	7
	330 einfach unendl. Systeme	6
	2310 einzelne	5
Raumkurven 4. Ordnung I. Art.	165 einfach unendl. Systeme	5
	495 einzelne	4

Neu sind unter den betrachteten Kurven die 2310 einzelnen R^4_{II} und die 495 einzelnen R^4_I.

Schliesslich möge noch erwähnt werden, dass man zu einer Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve gelangt durch die Fusspunkte der Lote, die sich aus einem Punkte O des Raumes auf die Sehnen jener kubischen Kurve fällen lassen. Leicht ergeben sich übrigens die ∞^2 Raumkurven 4. Ordnung 2. Art und drei Kegelschnitte, sowie auch drei Geraden. (Sturm Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 40. S. 13). Die Mannigfaltigkeit dieser Flächen beträgt nur $\infty^{12+3} = \infty^{15}$.

Spezialisierung der Fläche durch neu hinzutretende Singularitäten.

§ 11.

Erste Methode der Spezialisierung. Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und einem vereinzelten Doppelpunkt.

30. Wir erinnern uns der früher (in Nr. 15, S. 34) erhaltenen projektiven Erzeugungsweise: Jede Fläche 5. Ord-

nung mit einer doppelten kubischen Raumkurve D^3 lässt sich erzeugen mit Hilfe zweier zu einander projektiver Flächenbüschel 2. und 3. Ordnung, deren Grundkurven 4. bezw. 9. Ordnung jene Kurve D^3 gemein haben; und umgekehrt, zwei projektive Flächenbüschel 2. und 3. Ordnung mit gemeinsamer kubischer Kurve D^3 erzeugen eine solche Fläche 5. Ordnung.

Hiervon machen wir Gebrauch, um durch Spezialisierung der Erzeugung zu Spezialfällen der durch sie erzeugten Fläche zu gelangen.

Und zwar wollen wir einmal den Fall annehmen, dass die Gerade g, welche zusammen mit D^3 die Grundkurve R^4_1 des Flächenbüschels 2. Ordnung ausmacht, die Kurve R^6_{16}, die Ergänzungskurve von D^3 zur Grundkurve R^9_{36} des Flächenbüschels 3. Ordnung, in einem Punkte D trifft. Wie im allgemeinen Falle entsteht auf jeder beliebigen Gerade des Raumes eine Korrespondenz (2,3) mit solchen Punkten als entsprechenden, welche von homologen Flächen 2. und 3. Ordnung eingeschnitten werden; ihre fünf Koinzidenzen weisen auf fünf Punkte der erzeugten Fläche hin. Ferner entsteht auch hier auf jeder, D^3 einmal treffenden Gerade, wenn man von ihrem Stützpunkte auf dieser Kurve absieht, eine Korrespondenz (1,2) mit drei Koinzidenzen, also drei ausserhalb dieses Stützpunktes gelegenen Punkten der Fläche, woraus dann dessen Duplizität und, weil er beliebig auf D^3 lag, auch die der ganzen Kurve D^3 folgt.

Genau dieselbe Betrachtung lässt sich aber in unserem jetzigen Falle auch für alle durch Punkt D hindurchgehenden Geraden anstellen: Auch auf ihnen entsteht, wenn man von D absieht, eine Korrespondenz (1,2) mit drei ausserhalb D gelegenen Punkten der Fläche; derselbe erweist sich somit als Doppelpunkt der erzeugten Fläche.

Die angegebene Spezialisierung der allgemeinen Erzeugungsweise führt also zu einer Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve und noch einem ausserhalb derselben gelegenen

Doppelpunkt D; sie möge zur Unterscheidung von der gewöhnlichen Fläche F_3^5 mit $F^5_{3,1D}$ bezeichnet werden.

Da es unter den Doppelsekanten von D^3 keine geben kann, welche R_{16}^6 sogar in zwei, von ihren Stützpunkten auf D^3 verschiedenen Punkten träfe (widrigenfalls die Flächen 3. Ordnung des Büschels eine solche Gerade auch noch sämtlich enthalten müssten, also eine Kurve der Ordnung 10 gemeinsam hätten), so können wir mit dieser (ersten) Methode der Spezialisierung auch nur zu einem solchen vereinzelt gelegenen Doppelpunkte gelangen.

Wir wenden uns der näheren Betrachtung der soeben erhaltenen Fläche $F^5_{3,1D}$ zu.

31. Wegen der einen Bedingung, welche die erzeugenden Gebilde hier im Vergleich zu dem allgemeinen Falle bei F_3^5 mehr zu erfüllen haben, nämlich der Treffbedingung von g und R^6_{16}, verringert sich die unendliche Mannigfaltigkeit der neuerzeugten Fläche gegenüber der der allgemeinen um eins. Es gibt mithin $\infty^{29-1} = \infty^{28}$ Flächen 5. Ordnung mit kubischer Doppelkurve D^3 und vereinzeltem Doppelpunkt D.

Aus dem allgemeinen Verfahren, nach welchem wir auf der gewöhnlichen Fläche F_3^5 Geraden, Kegelschnitte sowie Raumkurven 3. und 4. Ordnung suchten, folgt, dass alle diese Kurven ohne Veränderung ihrer Mannigfaltigkeit auch auf der jetzigen, spezielleren Fläche $F^5_{3,1D}$ verlaufen müssen; denn, wenn auch eine gesuchte Kurve, wenn wir sie uns u. a. den Doppelpunkt D enthaltend denken, in ihm einen Punkt mehr mit der Fläche gemein hat, als wenn sie in einem Punkte einer beliebigen Kurve der Fläche diese trifft, so hat sie doch dafür, weil Punkt D vereinzelt auf unserer Fläche liegt, eine um eins erhöhte Bedingung (eine Doppelbedingung) zu erfüllen. Allgemein gilt:

Eine endliche Anzahl von Doppelpunkten wird die Mannigfaltigkeit der auf einer solchen spezielleren Fläche verlaufenden Kurven gegenüber ihrer Mannigfaltigkeit auf der allgemeinen d. i. doppelpunktsfreien Fläche nicht ändern.

So bleibt z. B. auf den Flächen 3. Ordnung mit 1 bis 4 Knotenpunkten trotz dieser Spezialitäten die Anzahl der Geraden eine endliche, die der Kegelschnitte eine einfach unendliche, die der kubischen Raumkurven eine doppelt unendliche. Anders freilich, wenn die neu hinzutretende Singularität in einem dreifachen Punkte besteht: denn dann haben die Kurven, welche die Doppelbedingung erfüllen, ihn zu enthalten, in ihm einen dreifachen d. h. drei einfache Punkte mit der Fläche gemein, wodurch in der Tat ein gemeinschaftlicher Punkt mehr gewonnen, also eine einfache Treffbedingung erübrigt wird. Die Mannigfaltigkeit der auf dieser Fläche verlaufenden Kurven erhöht sich demgemäss gegenüber der der Kurven auf der von dreifachen Punkten freien Fläche um eins. So besitzt z. B. die Fläche 3. Ordnung mit dreifachem Punkte (der Kegel 3. Ordnung) ∞^1 Geraden, ∞^2 (zerfallende) Kegelschnitte.

Für unsere Fläche $F^5_{3,1\,D}$ bedeutet das Gesagte, dass die Mannigfaltigkeit der auf ihr verlaufenden Kurven dieselbe ist wie auf $F_3{}^5$, insbesondere, dass die Zahl der Geraden und Kegelschnitte eine endliche bleibt.

Eine Gerade der Fläche erkennt man alsbald: die vom Doppelpunkte D an die kubische Doppelkurve D^3 gehende Doppelsekante, welche b heissen möge. Die Ermittelung der Gesamtzahl der Geraden geschieht wie bei der allgemeinen Fläche $F_3{}^5$ mit Hilfe zweier ebener Schnitte C^5 und $C_1{}^5$, von denen hier der eine, etwa C^5, den Punkt D enthalten möge. Von den 100 Doppelsekanten der Doppelkurve D^3, welche ausserdem noch C^5 und $C_1{}^5$ je einmal treffen, sind genau wie bei der allgemeinen Fläche $F_3{}^5$ $48 + 36 + 5 = 89$ (Nr. 3) als unbrauchbar abzuziehen, weil sie $F^5_{3,1\,D}$ nicht in sechs von einander getrennten Punkten treffen; es verbleiben wie dort elf; unter ihnen kennen wir bereits eine, b; da sie von dem Punkte D, einem Doppelpunkte auf C^5 ausgeht, lässt sie sich als aus jedem der beiden Punkte der durch D hindurchgehenden Zweige gelegt betrachten, weshalb sie unter den 100 Transversalen doppelt zu zählen ist. Es verbleiben also auf unserer Fläche $F^5_{3,1\,D}$

9 Geraden, welche den Doppelpunkt D nicht enthalten, eine, welche ihn enthält; im ganzen sind es nur 10 Geraden. Da b die Stelle von zwei Geraden der allgemeinen, doppelpunktsfreien Fläche vertritt, möge sie als binäre, die neun übrigen als unäre Geraden bezeichnet werden, „u_1, u_2, u_3, . . ., u_9."

Löst man den Doppelpunkt D unserer Fläche auf, (was man sich in der Weise vollzogen denken kann, dass in den einzelnen ebenen Schnittkurven durch D die vier in ihm zusammenstossenden Kurvenstücke unter Umgehung von D anders mit einander verbunden werden), so trennen sich die beiden vorhin in D übereinandergelegenen Punkte von C^5, und man ersieht, wie sich bei kontinuierlicher Deformation die doppelt zählende Gerade b des speziellen Falles $F^5_{3,1\,D}$ in zwei einfach zählende des allgemeinen, F_3^5, auflöst. Da hierbei auf die besonderen Verhältnisse der betrachteten Fläche $F^5_{3,1\,D}$ in nichts wesentlichem bezug genommen ist, so gilt das Gesagte allgemein für vereinzelte Doppelpunkte jeder Fläche, auf denen Gerade durch solche Punkte hindurchlaufen.

Dass aber die Gerade b durch das Zusammenfallen zweier Geraden der allgemeinen Fläche F^5_3 in sie nicht etwa zu einer Doppelgerade unserer Fläche $F^5_{3,1\,D}$ wird, ergibt sich mit Hilfe einer sie einmal schneidenden Gerade x: Die auf letzterer durch homologe Flächen der beiden projektiven Flächenbüschel zustandekommende Korrespondenz ist, wenn man von dem Stützpunkte von x auf b absieht, eine (1,3) mit vier Koïnzidenzen, wodurch sich also Punkt (x, b) als einfacher Punkt der Fläche erweist: und analog bei jedem Punkte der Gerade b.

Wie bei der Fläche F^5_3 führen die doppelt unendlich vielen Flächen 2. Ordnung durch D^3 in ihren Restschnittkurven zu einem doppelt-unendlichen System von Raumkurven R^4_{II}, welche D^3 siebenmal treffen. Wird insbesondere der eine der beiden noch verfügbaren Punkte auf eine der zehn Geraden $u_1, \ldots, u_9$, b gelegt, so spaltet sich diese ab, und es verbleiben noch die ∞^1, jene Gerade einmal treffen-

den kubischen Raumkurven des zu ihr gehörigen Büschels mit je fünf Treffpunkten auf D^3. Bei der Gerade b tritt hier insofern eine Änderung ein, als alle Flächen 2. Ordnung durch D^3 und b unsere Fläche $F^5_{3,1D}$ in Kurven schneiden, die in D als Doppelpunkt der Fläche daselbst ebenfalls einen Doppelpunkt besitzen; dies bedeutet aber, dass die kubischen Raumkurven des zur Gerade b gehörigen Büschels diese sämtlich in einem und demselben Punkte, D, treffen.

Alle Ebenen durch b schneiden die Fläche noch in ebenen Kurven 4. Ordnung C^4, welche sämtlich durch die beiden Stützpunkte von b auf D^3 sowie den Doppelpunkt D hindurchgehen. Mithin treffen die Kurven C^4 die Gerade b nur noch in einem von Ebene zu Ebene veränderlichen Punkte, einem Doppelpunkte der Gesamtschnittkurve 5. Ordnung (b, C^4), welcher allein auf eine Berührung der Ebene (b,C^4) mit unserer Fläche schliessen lässt. Also:

Alle Ebenen durch die binäre Gerade sind einfache Berührungsebenen der Fläche. Damit behebt sich aber bei einer solchen binären Gerade der Widerspruch, auf Grund dessen es bei den elf Geraden der allgemeinen Fläche, F_3^5, und ebenso bei den neun unären Geraden der jetzigen Fläche $F^5_{3,1D}$ keine Fläche 2. Ordnung durch die Doppelkurve D^3 geben kann, welche längs dieser Geraden die Fläche berühren. (Nr. 9 S. 18).

In der Tat gibt es eine Fläche 2. Ordnung durch D^3, welche $F^5_{3,1D}$ längs der binären Gerade b berührt: Wir denken uns dazu aus dem Büschel von Flächen 2. Ordnung mit (D^3,b) als Grundkurve diejenige herausgegriffen, welche einen beliebigen, unendlich nahe an b gelegenen Punkt P der Fläche enthält, in ihm also mit der Fläche eine gemeinsame Berührungsebene hat. Die Schnittkurve beider Flächen F^2 und $F^5_{3,1D}$ hat dann in P einen Doppelpunkt; und da durch P erst b hindurchgeht, muss auch die kubische Restschnittkurve R^{3*} des zu b gehörigen Büschels noch den Punkt P enthalten. R^{3*} träfe also die Gerade b zweimal in (D und P); desgleichen trifft D^3 die Ge-

rade b zweimal; da aber D^3 und R^{3*} wegen ihrer fünf Begegnungspunkte zu den beiden verschiedenen Systemen kubischer Raumkurven auf jener Fläche 2. Ordnung gehören, ist das zweimalige Treffen von b mit R^{3*} nur so möglich, dass letztere zerfällt in b und einen sie einmal treffenden Kegelschnitt. Die Gerade b zählt also bei dem Schnitt der betrachteten Fläche 2. Ordnung mit $F^5_{3,1D}$ doppelt, sie berühren einander längs dieser Geraden. Der dabei zustande kommende Kegelschnitt möge analog dem bisherigen als der zu b, b gehörige Kegelschnitt bezeichnet werden.

Noch auf andere Weise kann man sich die Existenz jener längs b berührenden Fläche 2. Ordnung klar machen: Wir sahen vorhin, wie sich bei Auflösung des Doppelpunktes von $F^5_{3,1D}$ die Gerade b in zwei Geraden, b', b'', der nun entstehenden gewöhnlichen Fläche F_3^5 auflöst. Denken wir uns denselben Prozess einmal rückwärts vollzogen, zuvor aber durch D^3, b', b'' die Fläche 2. Ordnung F^2 gelegt, so sehen wir jetzt, wie beim schliesslichen Zusammenfallen von b' und b'' in die binäre Gerade b F_2 in eine längs b berührende Fläche übergeht.

Ausser dem zu b, b, gehörigen Kegelschnitt besitzt $F^5_{3,1D}$ noch neun solche, welche b zur einen, eine der neun Geraden u_1 ..... u_9 zur anderen Stützgerade haben. Diese 9 Kegelschnitte müssen als Bestandteile kubischer Raumkurven des zu b gehörigen Büschels durch den Doppelpunkt D der Fläche gehen; sie zählen, da ihre eine Stützgerade b zwei Geraden der allgemeinen Fläche äquivalent ist, für zwei Kegelschnitte der allgemeinen Fläche und mögen deshalb als binäre Kegelschnitte bezeichnet werden.

Die $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ übrigen Kegelschnitte unserer Fläche mit zwei der unären Geraden (u_i, u_k) als Stützgeraden bieten nichs neues: Insgesamt besitzt also $F^5_{3,1D}$ nur $1 + 9 + 36 = 46$ Kegelschnitte und zwar 9 binäre und $1 + 36$ unäre. Bei der angegebenen projektiven Erzeugung unserer Fläche (Nr. 30) haben wir stets zwei einander entsprechende Flächen 2. und 3. Ordnung der beiden Büschel

mit einander zu schneiden: der eine Bestandteil des Schnittes ist immer die beiden Büscheln gemeinsame Kurve D^3; und mithin ist auch der jeweilige andere Bestandteil eine kubische Raumkurve, R^3, welche D^3 fünfmal trifft und zur Gerade $g \equiv b$ anders sich verhält als $D^3, g \equiv b$ also einmal trifft[4]), was durchweg in Punkt D, dem Treffpunkt von $g \equiv b$ mit R^6_{16} geschehen muss. Es ergibt sich also bei dieser projektiven Erzeugung die Fläche $F^5_{3,1D}$ als das Kontinuum oder der Ort der einfach unendlich vielen kubischen Raumkurven, welche zur binären Gerade b gehören.

---

§ 12.

Zweite Methode der Spezialisierung. Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und 1 bis 4 einzelnen Doppelpunkten:

$F^5_{3,1D}$; $F^5_{3,2D}$; $F^5_{3,3D}$; $F^5_{3,4D}$.

32. D^3, g, die Grundkurve des Flächenbüschels 2. Ordnung sei irgendwie im Raume gewählt; dann denken wir uns aus den $\infty^{19-10} = \infty^9$ Flächen 3. Ordnung durch D^3 zwei solche ausgewählt, welche im Unterschied gegen den allgemeinen Fall sich in einem Punkte, D_1, berühren und diese beiden als Konstituenten des Flächenbüschels 3. Ordnung benützt. In D_1 hat die Raumkurve 6. Ordnung R^6_{16}, in welcher jene beiden Flächen ausser in D^3 sich noch schneiden, einen Doppelpunkt. In ihm berühren sich alle Flächen jenes Büschels und zwar ist die Verbindungsebene seiner beiden Tangenten die gemeinschaftliche Berührungsebene. Nur eine Fläche des Büschels macht eine Ausnahme, die, welche D_1 als Doppelpunkt besitzt; man erkennt dieselbe, wenn man durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt der Flächen, D_1, alle möglichen Schnittebenen legt und den Satz anwendet: Unter den Kurven eines Büschels, welche sich sämtlich in einem Grundpunkte P berühren, gibt es eine, für welche P ein

---

[1]) Sturm, Flächen 3. Ordnung. S. 188.

Doppelpunkt ist. Diese eine Fläche 3. Ordnung des Büschels mit D_1 als Doppelpunkt, $F^3_{D_1}$, denken wir uns bei Festlegung der Projektivität zwischen den beiden Büscheln 2. und 3. Ordnung auf diejenige Fläche 2. Ordnung, $F^2_{D_1}$, bezogen, welche durch Punkt D_1 hindurchgeht.

Dann folgt, weil jede Ebene durch D_1 die erzeugte Fläche in einer Kurve schneidet, welche in D_1 einen Doppelpunkt hat[1]), dass dieser Punkt auch Doppelpunkt für die Fläche ist.

Wir gelangen also mit Hilfe der angegebenen, spezielleren projektiven Erzeugung zu einer Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und einem einzelnen Doppelpunkte D_1, die wir aber bereits vorhin auf anderem Wege gefunden und ausführlicher betrachtet haben.

Auch hier schneiden sich zwei entsprechende Flächen 3. und 2. Ordnung ausser in der ihnen allen gemeinsamen D^3 noch je in einer weiteren kubischen Raumkurve R^3, welche D^3 fünfmal, g einmal trifft. Da die von D_1 nach D^3 gehende Doppelsekante, die früher mit b bezeichnete binäre Gerade, von der beliebig angenommenen Doppelsekante g verschieden ist, ist g eine der neun unären Geraden der Flächen $F^5_{3,1D}$, und diese kommt also hier zu stande als Kontinuum der ∞^1, zu einer unären Gerade gehörigen kubischen Raumkurven.

33. Die hier zur Anwendung gelangte Art der Spezialisierung gestattet aber noch zweimalige Wiederholung: Da, wie bemerkt, ∞^9 Flächen 3. Ordnung durch die beliebig gewählte D^3 gehen, wird sich zu jeder solchen Fläche immer noch eine unendliche Anzahl gleichfalls durch D^3 gehender Flächen 3. Ordnung finden lassen, welche sie nicht bloss ein- sondern zwei- oder gar dreimal berühren. Nehmen wir gleich den letzten Fall; D_1, D_2, D_3 seien die drei Berührungs-

[1]) Cremona, Einleitung in die Theorie der höheren ebenen Kurven Nr. 51. Folgerung 2.

punkte beider Flächen[1]). Die Kurve R^6_{16}, welche sie ausser D^3 noch gemeinsam haben, hat alsdann drei Doppelpunkte (und wird vom Geschlecht 0). Die einfach unendlich vielen Flächen 3. Ordnung des durch die genannten beiden Flächen konstituierten Büschels haben in D_1, D_2, D_3 beziehentlich dieselbe Tangentialebene mit Ausnahme der Flächen F^3_{D1}, F^3_{D2}, F^3_{D3}, welche sie zu Doppelpunkten haben. Diese denken wir uns in der festzulegenden Projektivität bezw. den Flächen 2. Ordnung des Büschels (D^3g) durch die Punkte D_1, D_2, D_3 zugeordnet, wodurch dann diese drei Punkte nach den Auseinandersetzungen von vorhin zu Doppelpunkten der erzeugten Fläche werden.

Wir gelangen also damit zu Flächen 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve (D^3) und noch drei (oder zwei) vereinzelt gelegenen Doppelpunkten D_1, D_2, D^3 (bezw. D_1, D_2).

Weiter dürfen wir aber auf diesem Wege nicht gehen; denn jeder gemeinsame Berührungspunkt D_i zweier Flächen 3. Ordnung durch D^3 setzt, wie wir sahen, eine bestimmte Fläche F^3_{Di} des durch sie konstituierten Büschels, nämlich die, die in ihm einen Doppelpunkt hat, zu einer bestimmten Fläche 2. Ordnung des Büschels, derjenigen, welche durch D_i hindurchgeht, in Beziehung; durch drei solcher Paare sich entsprechender Flächen der beiden Büschel 3. und 2. Ordnung ist dann aber die projektive Beziehung festgelegt.

Hingegen ist es wohl möglich, die frühere I. Methode der Spezialisierung der allgemeinen Erzeugung mit der jetzigen II. Methode zu kombinieren d. h. als Gerade g, welche D^3 zur Grundkurve des Flächenbüschels 2. Ordnung ergänzt, eine solche zu wählen, welche die Restkurve R^6 des jetzigen Falles in einem Punkte D trifft. Wir erhalten dann Flächen 5. Ordnung mit kubischer

[1]) An sich könnte man mit der Zahl der Berührungen noch weiter gehen; der Grund der Beschränkung auf die Zahl drei wird sich alsbald ergeben.

Doppelkurve D^3 und bis zu vier einzelnen Doppelpunkten; dieselben mögen mit $F^5_{3,1D}$; $F^5_{3,2D}$; $F^5_{3,3D}$; $F^5_{3,4D}$ bezeichnet werden.

Denken wir uns eine beliebige Fläche 3. Ordnung F^3 durch D^3 und auf ihr irgend zwei Punkte D_1 und D_2 herausgegriffen, deren Verbindungslinie, $D_1 D_2$, also i. A. die Kurve D^3 nicht trifft, so wird es noch $\infty^{19-10-2\cdot 3} = \infty^3$ kubische Flächen durch D^3 geben, welche jene in D_1 und D_2 berühren. Unter ihnen gibt es ∞^2, welche F^3 noch ein drittes Mal berühren; ihre Berührungspunkte erfüllen eine Kurve. Daraus folgt aber leicht, dass die Verbindungslinien der drei Berührungspunkte zweier einander dreimal berührender Flächen F^3 und F^3_1 die Kurve D^3 i. A nicht treffen.

Ferner lässt sich auch noch der etwa hinzutretende Treffpunkt D von g mit R^6 stets so wählen, dass seine Verbindungslinien mit D_1, D_2, D_3 ebenfalls D^3 nicht treffen; d. h. aber: Im allgemeinen wird bei den Flächen $F^5_{3,2D}$, $F^5_{3,3D}$, $F^5_{3,4D}$ keine der Doppelpunktsverbindungslinien die Doppelkurve der Fläche treffen.

Wir gehen zunächst kurz auf $F^5_{3,2D}$ ein: Die beiden von ihren Doppelpunkten D_1 und D_2 an die Doppelkurve D^3 gehenden Doppelsekanten b_1 und b_2 haben je sechs Punkte mit der Fläche gemein und gehören ihr also ganz an. Ist C^5 ein ebener Schnitt durch D_1 und D_2, C^5_1 eine beliebige ebene Schnittkurve, die ja beide ihre drei Begegnungspunkte mit D^3 zu Doppelpunkten haben, so gibt es, wie früher allgemein bewiesen, insgesamt 11 Geraden, welche C^5 und C^5_1 einmal, D^3 zweimal und zwar in getrennten Punkten treffen. Unter diesen elf Geraden zählen aber b_1 und b_2, die ja Doppelsekanten von D^3 sind und als Geraden der Fläche jeden ebenen Schnitt einmal treffen, doppelt, insofern sie sich (wie vorhin bei $F^5_{3,1D}$ die Gerade b) als von jedem der beiden, in D_1 bezw. D_2 übereinanderliegenden Kurvenpunkten von C^5 an D^3 und C^5_1 gelegt betrachten lassen. Aus diesem Grunde mögen b_1 und b_2 wiederum als binäre, die $11-2.2 = 7$ übrigen Geraden, „u_1, u_2, ... u_7“,

als unäre Geraden der Fläche $F^5_{3,2D}$ bezeichnet werden. Also: Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und zwei einzelnen Doppelpunkten besitzt zusammen neun Geraden, sieben unäre und zwei binäre. Es folgt ohne weiteres: Von ihren Kegelschnitten gehören zwei zu b_1, b_1 und b_2, b_2; einer, der $2.2 = 4$ fach zählt, gehört zu b_1, b_2; er geht durch D_1 und D_2. 2.7 gehören zu b_1, n_i und b_2, u_i $(i = 1,2 \ldots .7)$; sie gehen durch D_1 bezw. D_2. $\frac{7.6}{1.2} = 21$ gehören zu zwei der sieben unären Geraden (u_i, u_k) und gehen durch keinen der beiden Doppelpunkte. Darnach besitzt die Fläche $F^5_{3,2D}$ im ganzen $2 + 1 + 2.7 + 21 = 38$ Kegelschnitte, und zwar 1 quaternären, 14 binäre, $2 + 21$ unäre. Die bei der Erzeugung auftretende Gerade g gehört, weil von b_1 und b_2 verschieden, unter die unären Geraden der Fläche.

Genau dieselben Schlüsse liefern für die Fläche $F^5_{3,3\,D}$ das Ergebnis:

Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve uud **drei** einzelnen Doppelpunkten besizt zusammen acht Geraden, fünf unäre $(u_1, u_2, \ldots u_5)$ nnd drei binäre (b_1, b_2, b_3).

Von ihren Kegelschnitten gehören drei zu b_1, b_1; b_2, b_2; b_3, b_3; drei zu b_1, b_2; b_2, b_3; $b_3\ b_1$, welche bezw. durch zwei der Doppelpunkte der Fläche D_1, D_2; D_2, D_3; D_3, D_1 gehen. $3.5 = 15$ Kegelschnitte gehörigen zu b_1, u_i; b_2, u_i; b_3, u_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$ und gehen durch D_1, bezw. D_2, D_3. Die übrigen $\frac{5.4}{1.2} = 10$ gehören zu zwei der fünf unären Geraden (u_i, u_k).

Darnach besitzt die Fläche $F^5_{3,3D}$ im ganzen $3+3+15+10 = 31$ Kegelschnitte, und zwar 3 quaternäre, 15 binäre und $3 + 10$ unäre:

Für $F^5_{3,4D}$ gilt:

Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve uud **vier** einzelnen Doppelpunkten be-

sitzt zusammen sieben Geraden, drei unäre (u_1, u_2, u_3) und vier binäre (b_1, b_2, b_3, b_4).

Vier ihrer Kegelschnitte gehören zu b_1, b_1; . . . . b_4, b_4; $\frac{4.3}{1.2}$ 6 gehören zu je zwei der binären Geraden und gehen durch deren Doppelpunkte; 3.4 12 gehören zu einer binären und einer unären Gerade; sie gehen durch den einen Doppelpunkt auf der binären Gerade; drei gehören zu je zwei unnären Geraden.

Insgesamt besitzt die Fläche $F^5_{3,4D}$ also $4+6-12+3=25$ Kegelschnitte, und zwar 6 quaternäre, 12 binäre und $4+3$ unäre.

Die vorhin bei der Erzeugung von $F^5_{3,4D}$ auftretende Gerade g ist die durch Punkt $D-D_4$ gehende binäre Gerade b_4.

Wir gehen zum Schluss noch auf die Mannigfaltigkeit der vier hier erhaltenen Flächen $F^5_{3,1D}$, $F^5_{3,2D}$, $F^5_{3,3D}$, $F^5_{3,4D}$ ein. Die Mannigfaltigkeit von $F^5_{3,1D}$ wurde bereits früher (No. 31, S. 82) als ∞^{28} erkannt; die der drei anderen Flächen lässt sich auf Grund der Mannigfaltigkeit der allgemeinen Fläche F^5_3 ermitteln, wenn man erwägt, wie viele Bedingungen durch die Spezialisierung mehr auferlegt werden unter gleichzeitiger Rücksichtnahme auf die Zahl der Reproduktionen dieser Flächen.

In Kürze gestaltet sich diese Untersuchung bei $F^5_{3,4D}$ so: Die Konstituenten des Flächenbüschels 3. Ordnung mussten hier drei einfache Berührungen haben, was drei einfache Bedingungen bedeutet; ferner waren dann in der festzulegenden Projektivität schon drei Paare homologer Elemente bestimmt und somit die Projektivität selbst, also eine dreifache Beschränkung gegenüber dem allgemeinen Falle; schliesslich musste die g die Restkurve R^6 treffen, eine einfache Bedingung. Im ganzen wächst also die Zahl der einfachen Bedingungen gegenüber der Erzeugung der allgemeinen Fläche F^5_3 um sieben. Dem gegenüber beträgt allerdings die Anzahl der Reproduktionen hier nicht wie bei F^5_3 ∞^4 (No. 15. S. 34.), sondern nur ∞^1; dies folgt aus den ∞^1

Raumkurven R^6, wie sie von den ∞^1 kubischen Flächen ausgeschnitten werden, welche durch D_3 eine zu g b_4 gehörige kubische Kurve R^3 sowie durch D_1, D_2 und D_3 hindurchgehen.

Hieraus ergibt sich die Mannigfaltigkeit von $F^5_{3,4D}$ als $\infty^{29-7-3}=\infty^{25}$; analog die von $F^5_{3,2D}$ als ∞^{27}; die von $F^5_{3,3D}$ als ∞^{26}.

Man ersieht, wie jeder zur allgemeinen Fläche F^5_3 noch hinzutretende Doppelpunkt ihre unendliche Mannigfaltigkeit um eins vermindert. In der Tat ist dies ein für alle Flächen gültiger Satz, welcher wegen seiner späteren mehrfachen Verwendung noch in voller Allgemeinheit bewiesen werden möge:

Die ersten Polarflächen aller ∞^3 Punkte des Raumes haben hinsichtlich einer festen Fläche als Grundfläche, im Falle dieselbe singuläre Punkte und Linien besitzt, diese und auch nur diese sämtlich gemeinsam. Irgend drei der ersten Polarflächen werden sich dann noch in einer endlichen Anzahl von Punkten P_i schneiden. Die Polarfläche eines beliebigen vierten, mit den Polen jener drei Flächen nicht in einer Ebene gelegenen Punktes wird dann keinen der P_i enthalten. Tut sie dies aber, und das bedeutet eine einfache Bedingung, so liegt dieser Punkt dann auf den ersten Polarflächen aller Punkte des Raumes und wird ein Doppelpunkt der Grundfläche (Cremona, Theorie d. Oberfl. No. 89). Es ist also eine einfache Forderung, wenn eine Fläche einen Doppelpunkt bekommen soll. Anders hingegen, wenn ein vorgegebener Punkt D Doppelpunkt sein soll. Die vier ersten Polarflächen, welche zu irgend vier Punkten des Raumes gehören (von denen keine drei in gerader Linie liegen), werden D i. A. alle nicht enthalten, es bedarf dazu also erst vier einfacher Bedingungen, wodurch er dann gemeinsamer Punkt aller ersten Polarflächen und somit Doppelpunkt der Grundfläche wird.

§ 13.

Dritte Methode der Spezialisierung. Hinzutreten von zusammen vier doppelten und dreifachen Punkten.

Fall 1. Die Flächen des Büschels 3. Ordnung haben ausser D^3 einen Doppelpunkt gemein.

34. Wir betrachten bei einer Fläche 3. Ordnung mit einem Knotenpunkt K die auf ihr gelegenen kubischen Raumkurven hinsichtlich ihres Verhaltens zum Knotenpunkte und wollen beweisen, dass es deren zwei wesentlich verschiedene Arten gibt: solche, welche notwendig durch den Knotenpunkt K hindurchgehen, und solche, welche nicht durch ihn gehen, eine Unterscheidung, die für das Folgende wesentlich werden wird:

Bekanntlich gehen durch den Doppelpunkt K einer Fläche 3. Ordnung sechs, sogenannte binäre Geraden, deren $\frac{6.5}{1.2} = 15$ Verbindungsebenen je noch eine weitere Gerade, im ganzen also 15 weitere Geraden ausschneiden, welche K nicht mehr enthalten. Ausser jenen sechs und diesen fünfzehn Geraden besitzt die Fläche keine weiteren. Betrachten wir nun drei Geraden der Fläche g, g_k, g_l, von denen nur g den Doppelpunkt enthält, während g_k und g_l sie einmal treffen, und legen wir durch diese drei Geraden eine Fläche 2. Ordnung, so haben sie für deren Bestimmung zusammen die Bedeutung von $3.3 - 2.1 = 7$ Punkten. Es gehen also durch g_l g_k, g_l ∞^2 Flächen 2. Ordnung hindurch, welche unsere Fläche F^3 noch in je einem Kurvengebilde 3. Ordnung schneiden. Da die Geraden auf der Fläche nur in endlicher Zahl, die Kegelschnitte in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit vorhanden sind, können unsere ∞^2 kubischen Restgebilde nicht durchweg zerfallen; andererseits können dieselben keine ebenen Kurven 3. Ordnung darstellen, da sonst die Fläche 2. Ordnung zerfallen müsste und g, g_k, g_l dann ebenfalls in einer Ebene liegen müssten, was nach Voraussetzung nicht statt hat. Wir kommen also in der Tat auf die angegebene Weise zu ∞^2 kubischen Raumkurven,

und da die vollen Schnittkurven mit F^3 in K einen Doppelpunkt haben müssen, durch den bisher nur die Gerade g geht, so müssen notwendig auch unsere kubischen Raumkurven je einmal durch ihn hindurchgehen.

Die kubischen Raumkurven der anderen Art ergeben sich als Restschnitte der ∞^2 Flächen 2. Ordnung, welche sich durch 2 binäre Geraden g_1, g_2, sowie noch eine Treffgerade g_k der einen dieser beiden Geraden, etwa g_1, legen lassen. Der Nachweis, dass die Restschnitte kubische Raumkurven sind, ist derselbe wie vorhin. Da die vollen Schnittkurven der Flächen 2. Ordnung mit F^3 wegen der beiden Geraden g_1, g_2 in K bereits einen Doppelpunkt haben, werden die hier erhaltenen ∞^2 kubischen Kurven i. A. nicht durch ihn hindurchgehen. Die ∞^1, welche es tun, müssen von zerfallenden Flächen 2. Ordnung herrühren; diese Kurven selbst zerfallen in die feste, binäre Gerade, welche die Ebene (g_k, g_1) zum vollen Schnitt ergänzt und in die ∞^1 Kegelschnitte um g_2. Demgemäss geht keine eigentliche Kurve des hier erhaltenen Systemes durch den Knotenpunkt.

Einfacher ergeben sich die beiden Arten kubischer Kurven in der Weise, dass man den ∞^{12} kubischen Raumkurven die zehn Bedingungen auferlegt, entweder zehn beliebige ebene Schnitte unserer Fläche F^3 zu treffen (und deren gibt es ∞^2, welche wegen ihrer zehn gemeinsamen Punkte mit F^3 ihr angehören und den Knotenpunkt i. A. nicht enthalten) oder acht beliebige ebene Schnitte und dazu den Knotenpunkt K zu treffen (auch hier gibt es ∞^2, welche wegen ihrer $8 + 2 = 10$ gemeinsamen Punkte mit F^3 ihr angehören und notwendig durch K gehen).

35. Wir denken uns nun eine Fläche 3. Ordnung F^3 mit einem Knotenpunkt K, deren es nach den Schlussbemerkungen von Nr. 33 $\infty^{19-1} = \infty^{18}$ gibt, und eine der ∞^2, auf ihr verlaufenden kubischen Raumkurven R^3, welche K nicht enthalten; durch R^3 gehen $\infty^{19-10} = \infty^9$ Flächen 3. Ordnung und insbesondere $\infty^{9-4} = \infty^5$, welche K auch zum Knotenpunkt haben. Sei $F_1{}^3$ eine von diesen. Beide Flächen, F^3 und $F_1{}^3$, konstituieren einen Büschel, dessen

Flächen, wie jetzt bewiesen werden möge, gleichfalls K als Doppelpunkt besitzen: Denn auf allen Geraden durch K schneiden die einfach unendlich vielen Flächen des Büschels eine kubische Involution ein, deren sämtliche Punktetripel ja aus zweien, z. B. den von F^3 und $F_1{}^3$ eingeschnittenen als ihren Konstituenten hervorgehen. Da bei diesen beiden aber zwei ihrer drei Punkte in K liegen, geschieht dies auch bei den übrigen; alle Flächen F^3_x des Büschels haben nur einen ausserhalb K gelegenen Schnittpunkt auf der Gerade, K ist auch für sie ein Doppelpunkt.

Ersichtlich gilt dies Ergebnis in der allgemeineren Fassung:

Haben zwei Flächen n. Ordnung einen gemeinsamen Doppelpunkt K, so ist derselbe auch für alle Flächen des durch sie konstituierten Büschels ein Doppelpunkt:

Einen derartigen Flächenbüschel 3. Ordnung, dessen Flächen also neben einer kubischen Kurve D^3 noch einen ausserhalb derselben gelegenen Knotenpunkt K gemeinsam haben, nehmen wir hier anstelle des bei der früheren Erzeugung verwendeten allgemeineren Büschels und verfahren im übrigen wie dort: g sei eine beliebige Doppelsekante von D^3 und zwischen dem Flächenbüschel 2. Ordnung (D^3g) und dem jetzigen kubischen Büschel werde eine Projektivität hergestellt.

Dass durch die Schnitte entsprechender Flächen 2. und 3. Ordnung eine Fläche 5. Ordnung entsteht, auf der D^3 Doppelkurve ist, lässt sich wie im allgemeinen Falle beweisen.

Weiterhin aber entsteht hier auf allen Geraden durch K, wenn man von diesem selbst absieht, unter deren Punkten eine Korrespondenz (2,1) mit 3 Koïnzidenzen; also drei Punkte unserer jetzigen Fläche liegen auf solchen Geraden ausserhalb K, womit dieser selbst als Doppelpunkt der Fläche erkannt ist.

Damit hat uns also unsere jetzige spezielle Erzeugungsweise wiederum zu der uns bereits bekannten Fläche $F^5_{3,1D}$ geführt.

Die Gerade g, durch deren zugehörige kubische Kurven $F^5_{3,1D}$ entsteht, wird unäre Gerade der Fläche.

Die von K an D^3 gehende Doppelsekante, die binäre Gerade der Fläche, b, ist allen Flächen 3. Ordnung des Büschels gemeinsam.

Auf die hier angegebene Weise lässt sich $F^5_{3,1D}$ nur endlich oft erzeugen: denn es gibt nur eine endliche Anzahl von Flächen 3. Ordnung, welche durch D^3 und eine kubische Kurve R^3 eines der neun zu einer unären Gerade gehörigen Büschels gehen, und dazu noch, wie hier erforderlich, $D \equiv K$ zum Doppelpunkt haben $(\infty^{19} - (^{10} + ^{10} - ^5) - ^4 = \infty^0$. Aus der angedeuteten Mannigfaltigkeit der erzeugenden Elemente, der Mannigfaltigkeit ∞^3 der aufstellbaren projektiven Beziehungen und der nur endlichen Reproduktion folgt als Kontrolle wiederum die Mannigfaltigkeit der Fläche als $\infty (^{18} + ^2 + ^5) - ^2 + ^2 + ^3 = \infty^{28}$.

36. Im Gegensatze zu dem vorhin eingeschlagenen Verfahren wählen wir jetzt auf einer der ∞^{18} Flächen 3. Ordnung F^3 mit Knotenpunkt K eine bestimmte, durch diesen hindurchgehende kubische Raumkurve D^3. Es lassen sich $\infty^{19-4-8} = \infty^7$ Flächen 3. Ordnung F^3_1 finden, welche K gleichfalls als Doppelpunkt besitzen und durch D^3 hindurchgehen. Wegen der doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit solcher Kurven D^3 auf F^3 sind insgesamt $\infty^{18+7+2} = \infty^{27}$ derartige Zusammenstellungen zweier kubischer Flächen möglich. Jede Zusammenstellung führt zu einem Büschel, dessen sämtliche Flächen gleichfalls K als Knotenpunkt, sowie D^3 enthalten. Irgend zwei der ∞^1 Flächen des Büschels hätten also ebensogut als Konstituenten dienen können, sodass es $\infty^{27-2} = \infty^{25}$ Flächenbüschel 3. Ordnung gibt, deren sämtliche Flächen einen Knotenpunkt K und eine durch ihn hindurchgehende kubische Raumkurve D^3 gemeinsam haben.

Einen solchen Flächenbüschel 3. Ordnung benützen wir jetzt zur Erzeugung der Fläche, indem wir ihn projektiv auf einen Flächenbüschel 2. Ordnung beziehen, welcher D^3 und eine ihrer ∞^2 Doppelsekanten g als Grundkurve besitzt; dies ist auf $\infty^{25+2+3} = \infty^{30}$ Weisen möglich.

Das Erzeugnis ist eine Fläche 5. Ordnung mit D^3 als Doppelkurve, der ihr angehörige Punkt K ergibt sich mit Hilfe der auf den ihn enthaltenden Geraden zustande kommenden Korrespondenz (1,1) (wie von jetzt ab in abgekürzter Form gesagt werden möge) als $5 - 2 = 3$facher Punkt, T. Wir sind also zu einer Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve D^3 und einem auf dieser Kurve gelegenen dreifachen Punkte T gelangt, welche wir mit $F^5_{3,1T}$ bezeichnen wollen [1]). Die projektive Erzeugungsweise lieferte ∞^{30} solcher Flächen, wobei freilich noch nicht die Mannigfaltigkeit der Reproduktionen jeder einzelnen berücksichtigt ist, welche später zur Sprache kommen werden.

Auch für diese Fläche gilt, dass durch den auf der Doppelkurve D^3 neu auftretenden Punkt T die Mannigfaltigkeit der auf ihr verlaufenden Kurven gegenüber der der allgemeinen Fläche F_3^5 nicht geändert wird. Denn wenn auch durch einen auf der Doppelkurve gelegenen dreifachen Punkt für alle ihn enthaltenden Kurven ein Schnittpunkt gewonnen wird, so wird dafür durch die nunmehr doppelte Bedingnng, dass die gesuchte Kurve einen bestimmten Punkt von D^3 enthalten soll, eine Bedingung verloren.

Es folgt für unsere Fläche $F^5_{3,1T}$, dass insbesondere die Zahl der Geraden und Kegelschnitte (wie bei F^5_3) eine endliche ist.

Gewisse Geraden erkennt man ohne besondere Schwierigkeiten: Da ein Strahl durch T daselbst die Fläche dreimal trifft, muss er mit ihr noch drei weitere Punkte gemein haben, um ihr ganz anzugehören. Das ist nur so möglich, dass er noch einmal die Doppelkurve D^3 und irgend eine weitere, einfache Kurve der Fläche, etwa eine ebene Schnittkurve C^5 in getrennten Punkten treffe. Die drei Schnittpunkte von D^3 mit der Ebene von C^5, Doppelpunkte für diese Kurve, mögen A, B, C heissen. Alle von T nach den

[1]) Diese Fläche behandelt auch unter anderem Gesichtspunkt: Del Re, Atti della Reale Acc. dei Lincei, 1892 Serie V. 1_2.

Punkten von D^3 gehenden Strahlen bilden aber einen Kegel 2. Grades, welcher C^5 zehnmal trifft, darunter $3.2 = 6$ mal in A, B und C. Es verbleiben also nur $10-6 = 4$ Strahlen, welche D^3 und C^5 noch in zwei getrennten Punkten treffen und somit der Fläche angehören. Von dem auf der Doppelkurve D^3 gelegenen dreifachen Punkte T der Fläche $F^5_{3,1T}$ gehen also vier Geraden aus.

Die Zahl der übrigen Geraden, welche Punkt T nicht enthalten, ergibt sich ähnlich wie in früheren Fällen so: Wir denken uns noch einen zweiten ebenen Schnitt C^5_1, der den dreifachen Punkt T enthalten möge; seine Schnittpunkte mit D^3 seinen A_1, B_1, $C_1 \equiv T$. Wir wissen, dass es 100 Transversalen gibt, welche C^5 und C^5_1 je einmal, D^3 zweimal treffen. Um zu den gewünschten Geraden zu gelangen, haben wir aus diesen 100 Transversalen einerseits die, welche überhaupt nicht zu Geraden der Fläche führen, andrerseits diejenigen durch T auszuscheiden:

Aus jedem der drei Punkte A, B, C gibt es $2.5-2-2-3 = 3$ Transversalen, welche D^3 und C^5_1 in getrennten Punkten treffen. Als Transversalen zählen sie, weil von Doppelpunkten der Kurve C^5 ausgehend, doppelt. Sie führen nicht zu Geraden der Fläche; es entfallen durch sie also dreimal $3.2 = 18$ Transversalen.

Hingegen gehen von A_1, B_1, C_1 je 4 Transversalen aus, welche D^3 und C^5 in getrennten Punkten treffen. Darunter zählen die von A_1 und B_1 ausgehenden doppelt, die von $C_1 = T$ als dreifachem Punkt der Kurve C^5_1 ausgehenden dreifach. Es entfallen durch sie als für unsere Zwecke ungeeignet $2.4 + 2.4 + 3.4 = 28$ Transversalen.

Ferner erübrigen sich von den 100 Transversalen die, welche einen der Punkte A, B, C mit einem der Punkte A_1, B_1, C_1 verbinden; von ihnen zählen die drei von C_1 ausgehenden $3.2 = 6$ fach, die sechs übrigen $2.2 = 4$ fach; sie repräsentieren zusammen also $3.6 + 6.4 = 42$ Transversalen.

Schliesslich führen auch noch die fünf Transversalen, welche von den fünf Begegnungspunkten von C^5 und C^5_1

als Doppelsekanten an D^3 gehen, nicht zu Geraden der Fläche. Es verbleiben $100-18-28-42-5=7$ Transversalen, welche unsere Fläche in sechs verschiedenen Punkten treffen und ihr somit als Geraden angehören, ohne durch den Punkt T hindurchzugehen.

Unsere Fläche $F^5_{3,1T}$ besitzt also insgesamt elf Geraden, von denen vier durch den dreifachen Punkt T gehen. Letztere mögen mit k_1, k_2, k_3, k_4, die übrigen sieben mit g_1, g_2, ... g_7 bezeichnet werden. Hier sind also im Gegensatz zum Spezialfalle $F^5_{3,1D}$ keine zwei Geraden der allgemeinen Fläche F^5_3 in eine zusammengerückt.

Die ∞^2 Flächen 2. Ordnung F^2 durch D^3 schneiden $F^5_{3,1T}$ je in einer Raumkurve R^4_{II}. Der volle Schnitt aller dieser Flächen F^2 muss in T einen dreifachen Punkt haben, m. a. W., es müssen durch diesen Punkt drei Zweige der Gesamtschnittkurve hindurchgehen; davon werden zwei Zweige von der Doppelkurve D^3 gebildet, der dritte Zweig muss von den Restschnittkurven R^4 herrühren. Also: Die Raumkurven 4. Ordnung 2. Art, welche von den Flächen 2. Ordnung durch D^3 als Restschnitte ausgeschnitten werden, gehen sämtlich einmal durch den dreifachen Punkt T unserer Fläche.

Spezialisieren wir jetzt wieder hier wie bei der allgemeinen Fläche F^5_3, indem wir nur die elf Büschel von Flächen 2. Ordnung durch D^3 und eine Gerade der Fläche betrachten, so erhalten wir wiederum elf einfach unendliche Systeme kubischer Raumkurven, welche die betreffende Gerade, ihre Stützgerade, einmal treffen und insbesondere hier noch den festen Punkt T enthalten oder nicht, je nachdem ihre Stützgerade ihn nicht enthält oder enthält. Also: Die Büschel der zu den Geraden g_1,..... g_7 gehörigen kubischen Raumkurven treffen die Doppelkurve D^3 in dem festen Punkte T und vier veränderlichen, die Büschel der zu k_1 ..... k_4 gehörigen Kurven aber in fünf veränderlichen Punkten.

Die endliche Anzahl von Flächen 2. Ordnung durch D^3 und zwei Geraden der Fläche schneidet zur Ergänzung

noch je einen Kegelschnitt aus, welcher mit den beiden Geraden die Abart einer R^4_{II} bildet, also beide einmal trifft und nach dem vorhin Gefundenen den Punkt T enthalten muss, wenn seine beiden Stützgeraden ihn nicht enthalten und umgekehrt. Mithin werden die $\frac{7.6}{1.2} = 21$ Kegelschnitte unserer Fläche $F^5_{3,1T}$ mit zwei der sieben Geraden $g_1, \ldots\ldots g_7$ als Stützgeraden durch T hindurchgehen. Hingegen treffen die $7 . 4 = 28$ Kegelschnitte mit einer der Geraden g_i und einer der Geraden k_i als Stützgeraden den dreifachen Punkt T nicht.

Die dritte noch mögliche Zusammenstellung zweier Geraden der Fläche ist die zweier der vier Geraden $k_1, \ldots\ldots k_4$. Die Fläche 2. Ordnung, welche durch diese und D^3 hindurchgeht, ist ersichtlich der Kegel 2. Grades, welcher D^3 von T aus projiziert; der Kegelschnitt, den er als Restschnitt ausschneidet, ist nichts anderes, als das Paar der jeweiligen anderen beiden Geraden k, also ein Geradenpaar. Im ganzen besitzt also unsere Fläche $F^5_{3,1T}$ $21 + 28 = 49$ eigentliche Kegelschnitte, welche durch die $\frac{4.3}{1.2} =$ 6 Paare von Geraden k zu den 55 Kegelschnitten der allgemeinen Fläche F^5_3 ergänzt werden.

Während bei der allgemeinen Fläche F^5_3 die 55 Ebenen der Kegelschnitte durchweg dreifache Berührungsebenen der Fläche waren, trifft dies hier nur bei einem Teile derselben zu: Die 21 Kegelschnitte, welche T enthalten, bedürfen zur Ergänzung ihres ebenen Schnittes noch einer Kurve 3. Ordnung mit T als Doppelpunkt. Beide Kurven schneiden sich also ausserdem noch in vier Punkten; von diesen liegen zwei, die beiden weiteren Schnitte der Ebene mit D^3, auf dieser Kurve; und es verbleiben somit nur zwei Doppelpunkte des vollen Schnittes, welche auf Berührung schliessen lassen; die genannten 21 Ebenen sind also nur Doppelberührungsebenen unserer Fläche $F^5_{3,1T}$. Ganz analog ergibt sich, dass auch die sechs Ebenen der den Punkt T enthaltenden Geradenpaare nur Doppelberührungsebenen der

Fläche sind; und nur die 28 Ebenen der den Punkt T nicht enthaltenden Kegelschnitte führen zu dreifachen Berührungsebenen.

Die projektive Erzeugung, vermittelst welcher wir uns unsere Fläche $F^5_{3,1T}$ herstellten, liess die Mannigfaltigkeit ∞^{30} zu und führte also anscheinend zu ebenso vielen Flächen dieser Art; wir wollen nun noch sehen, wie oft eine solche Fläche in dieser Weise zustande kommt: die Gerade g, welche mit D^3 zusammen die Grundkurve des Flächenbüschels 2. Ordnung bildet, wird i. A. T nicht enthalten und daher auf der erzeugten Fläche $F^5_{3,1T}$ die Rolle einer der vorhin mit $g_1, \ldots . g_7$ bezeichneten Geraden spielen. Auch hier schneiden sich homologe Flächen der beiden Büschel ausser in D^3 noch in je einer kubischen Raumkurve R^3, welche sämtlich g einmal treffen und durch T hindurchgehen; sie bilden den zur Gerade $g \equiv g_i$ unserer Fläche $F^5_{3,1T}$ gehörigen Büschel. Das Kurvengebilde 6. Ordnung R^6, welches zusammen mit D^3 die Grundkurve 9. Ordnung des Flächenbüschels 3. Ordnung bildet, gehört der Fläche $F^5_{3,1T}$ gleichfalls an. Aber ähnlich wie im allgemeinen Falle ist jede der Kurven R^6, zu welcher man gelangt, wenn man durch D^3 und eine Kurve R^3 jenes Büschels eine Fläche 3. Ordnung legt, die T zum Doppelpunkt („K") hat, geeignet, mit D^3 die Grundkurve eines Flächenbüschels 3. Ordnung zu bilden und mit dem Büschel 2. Ordnung die Fläche zu erzeugen. Die Frage nach der Mannigfaltigkeit der Reproduktionen unserer Fläche kommt also in letzter Linie wiederum auf die nach der Anzahl jener Kurven R^6 hinaus. Sie ist diejenige der geforderten Flächen 3. Ordnung, wenn man berücksichtigt, dass D^3 und R^3 ausser T noch vier gemeinsame Punkte haben, also $\infty^{19-4-8-(8-4)}$; m. a. W. ∞^3 mal reproduziert sich eine Fläche $F^5_{3,1T}$ mit Hilfe der früher angegebenen projektiven Erzeugungsweise; ihre Mannigfaltigkeit beträgt $\infty^{30-3} = \infty^{27}$. Da die Mannigfaltigkeit der Fläche F_3^5 ∞^{29} beträgt, folgt somit, dass es für eine Fläche 5. Ordnung mit kubischer Doppelkurve eine zweifache Bedingung bedeutet, wenn sie auf der Doppelkurve einen dreifachen Punkt T besitzen soll.

Schliesslich können wir noch die hier angewandte Methode der Spezialisierung, durch die wir zu $F^5_{3,1T}$ gelangten, mit der ersten Methode kombinieren; wir wählen dazu die Gerade g, welche mit D^3 die Grundkurve des Flächenbüschels 2. Ordnung bildet, so, dass sie die Kurve 6. Ordnung, welche D^3 zur Grundkurve des Flächenbüschels 3. Ordnung ergänzt, in einem Punkte trifft. Alsdann ergibt sich eine Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve D^3, einem auf dieser gelegenen dreifachen Punkte T und einem vereinzelt gelegenen Doppelpunkte D; nach unserer Bezeichnung eine Fläche $F^5_{3,1\,D,1\,T}$.

37. Die betrachtete Fläche $F^5_{3,1T}$ legt die Frage nahe, ob es nicht auch Flächen 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve und einem ausserhalb derselben gelegenen dreifachen Punkt T gibt. Nun lässt sich aber zeigen, dass ein solcher Punkt T noch ein ganze Doppellinie, die von ihm an D^3 gehende Doppelsekante, nach sich zieht, wodurch sich dann also eine Fläche ergibt, die eher als Spezialfall einer Fläche 5. Ordnung mit doppelter Raumkurve R^4_1 anzusehen ist.

Der Beweis ist folgender: Wir legen von T aus die Doppelsekante d an die Doppelkurve D^3; dieselbe hat mit der Fläche $3 + 2.2 = 7$ Punkte gemein und gehört ihr also ganz an. D^3 und d bestimmen zusammen einen Flächenbüschel 2. Ordnung, dessen Flächen unsere Fläche $F^5_{3,T}$ noch je in einem Kurvengebilde 3. Ordnung schneiden, das T zum Doppelpunkt hat. Ebene Kurven 3. Ordnung können sie, weil auf Flächen 2. Ordnung gelegen, nicht sein; ebensowenig eigentliche kubische Raumkurven wegen ihres Doppelpunktes in T: dieselben zerfallen also sämtlich in Gerade und Kegelschnitt mit dem Treffpunkt T. Durch die ∞^1 Flächen des Büschels ergäben sich also ∞^1 Geraden; das ist aber nicht möglich, denn durch T geht nur eine endliche Anzahl von Geraden der Fläche $F^5_{3,1T}$, die $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$, welche des weiteren D^3 und eine beliebige ebene Schnittkurve C^5 je einmal in getrennten Punkten

treffen. Andererseits kann keine dieser neun Geraden beständiger Bestandteil der zerfallenden kubischen Restkurven sein; denn es müssten unendlich viele Flächen 2. Ordnung unseres Büschels durch sie gehen, während deren voller Schnitt 4. Ordnung durch D^3,d doch bereits erschöpft ist. Der Widerspruch löst sich nur so, dass wir jene ∞^1 Geraden sämtlich identisch mit der Gerade d annehmen. Der Gesamtschnitt $2 \cdot 5 = 10$. Ordnung besteht dann also aus D^3,d und einem Kegelschnitt, womit d als Doppellinie der Fläche erwiesen ist. Also:

Eine Fläche 5. Ordnung, welche als Doppellinie eine kubische Raumkurve (und nur eine solche) besitzt, kann nur auf dieser Kurve gelegene dreifache Punkte besitzen.

Fall 2. Die Flächen des Büschels 3. Ordnung haben ausser dem kubischen Bestandteil D^3 ihrer Grundkurven zwei Doppelpunkte gemein.

38. Der nächstweitere Schritt in der Spezialisierung unserer früheren allgemeinen Erzeugung besteht in der Benützung eines Flächenbüschels 3. Ordnung, dessen sämtliche Flächen zwei feste Punkte K_1 und K_2 zu Doppelpunkten haben und ausserdem noch eine kubische Raumkurve D^3 als gemeinsamen Bestandteil ihrer Grundkurve besitzen.

Sei F^3 eine Fläche 3. Ordnung mit 2 Knotenpunkten K_1 und K_2: Hier gibt es, ähnlich wie bei der Fläche mit einem Knotenpunkt, ∞^2 kubische Raumkurven, welche keinen der beiden Knotenpunkte, ∞^2, welche nur einen, und ∞^2, welche beide Knotenpunkte enthalten, je nachdem die zehn erforderlichen gemeinsamen Punkte mit der Fläche durch zehn zu treffende beliebige ebene Schnitte, oder nur acht und einen zu treffenden Doppelpunkt oder nur sechs und zwei zu treffende Doppelpunkte erzielt werden.

Wir betrachten die ∞^2 kubischen Raumkurven des letzten Systems durch K_1 und K_2; D^3 sei eine von ihnen; Eine Fläche 3. Ordnung $F^3{}_1$, welche durch D^3 hindurchgeht und für die K_1 und K_2 gleichfalls Doppelpunkte sind, hat von selbst mit F^3 die Verbindungsgerade q der beiden Knotenpunkte

K_1 und K_2 (die sogenannte quaternäre Gerade) gemeinsam, schneidet also F^3 nur noch in einer Restschnittkurve 5. Ordnung; diese muss, da der volle Schnitt 9. Ordnung K_1 und K_2 als vierfache Punkte besitzt, in ihnen Doppelpunkte haben.

D^3 und q begegnen einander zweimal, bilden also die Abart einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, weswegen jener Restschnitt 5. Ordnung eine Kurve R^5 vom Range 12 ist (Sturm, Flächen 3. Ordnung S. 206); ihr Geschlecht ist 2; sie vermag also, ohne zu zerfallen, zwei Doppelpunkte (in K_1 und K_2) zu besitzen.

Zwei solche Flächen 3. Ordnung F^3 und F_1^3 denken wir uns als Konstituenten eines Büschels 3. Ordnung gewählt. Bilden wir noch den Flächenbüschel 2. Ordnung mit D^3 und einer ihrer Doppelsekanten als Grundkurve und beziehen ihn projektiv auf den Büschel 3. Ordnung, so ergibt sich als Erzeugnis entsprechender Flächen eine Fläche 5. Ordnung mit D^3 als Doppelkurve und zwei auf ihr gelegenen dreifachen Punkten $T_1 \equiv K_1$, $T_2 \equiv K_2$. Die Beweise sind denen von Nr. 36 analog. Die Fläche möge mit $F^5_{3,2T}$ bezeichnet werden.

Schliesslich kann man auch noch die jetzige Methode der Spezialisierung mit der früher behandelten, ersten kombiniren, d. h. die Doppelsekante g von D^3 so wählen, dass sie die vorhin erhaltene Kurve R^5 einmal trifft, wobei dann eine Fläche F_3^5 mit zwei auf der Doppelkurve D^3 gelegenen dreifachen Punkten und einem einzelnen Doppelpunkt entsteht, die folgerichtig mit $F^5_{3,1D,2T}$ zu bezeichnen wäre.

Fall 3. Die Flächen des Büschels 3. Ordnung haben ausser dem kubischen Bestandteil D^3 ihrer Grundkurve noch drei Doppelpunkte gemeinsam.

39. Ist D^3 eine der ∞^2 Kurven, welche keinen der Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 von F^3 enthalten, so müsste eine etwaige weitere Fläche 3. Ordnung, F^3_1, durch D^3, die gleichfalls K_1, K_2, K_3 zu Knotenpunkten besässe, ausser deren drei Verbindungsgeraden noch die drei von ihnen an

D^3 gehenden Doppelsekanten mit F^3 gemeinsam haben; dadurch wäre dann aber der volle Schnitt 9. Ordnung erschöpft, ohne dass für ihn K_1, K_2, K_3, wie erforderlich, vierfache Punkte wären. Die Annahme, dass die gemeinsame kubische Raumkurve D^3 beider Flächen mit drei gemeinsamen Knotenpunkten keinen von diesen enthielte, ist also falsch. Ebenso führen auch noch die beiden Annahmen, dass D^3 bloss einen oder zwei der drei gemeinsamen Doppelpunkte beider Flächen F^3 und F^3_1 enthielte, auf Unmögliches. Denn in diesem Falle fehlen immer noch gemeinsame Kurvenbestandteile, welche D^3, die Verbindungsgeraden der Knotenpunkte und die Doppelsekanten aus den Knotenpunkten an D^3 zur vollen Schnittkurve 9. Ordnung ergänzten, ohne dass dieselben imstande wären, die den Flächen gemeinschaftlichen Knotenpunkte zu vierfachen Punkten des vollen Schnittes zu machen. Erst, wenn wir D^3 aus dem doppelt unendlichen Systeme der kubischen Kurven durch alle drei Knotenpunkte nehmen, hebt sich der Widerspruch. Zwei solcherart zu einander gelegene Flächen F^3 und F^3_1 haben von selbst noch die drei Verbindungsgeraden der drei Knotenpunkte gemeinsam. Diese bilden ein Dreieck, also eine ausgeartete ebene Kurve 3. Ordnung. Nun gilt aber allgemein, dass zwei Flächen 3. Ordnung, welche eine ebene Kurve 3. Ordnung gemein haben, sich noch in einer Raumkurve 6. Ordnung 18. Ranges schneiden [1]), welche in dem Falle, wo sie zerfällt und eine kubische Raumkurve als einen Bestandteil besitzt, (der hier durch D^3 dargestellt wird,) als Ergänzung noch eine zweite kubische Raumkurve erfordert, die jener in fünf Punkten begegnet [2]). Diese Ergänzungskurve 3. Ordnung muss je einmal durch K_1, K_2, K_3 gehen und also D^3 noch in zwei anderen Punkten treffen.

Zwei solche Flächen 3. Ordnung F^3 und F^3_1 mit drei gemeinsamen Knotenpunkten und einer diese drei enthaltenden gemeinsamen kubischen Raumkurve D^3

---

[1]) Sturm, Flächen 3. Ordnung S. 197.

[2]) Ebenda S. 188.

wählen wir als Konstituenten eines Büschels 3. Ordnung. Wird derselbe projektiv bezogen auf einen Flächenbüschel 2. Ordnung mit D^3, g als Grundkurve, so führt dies zu einer Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve D^3 und drei auf ihr gelegenen dreifachen Punkten (K_1, K_2, K_3, hier bzw. T_1, T_2, T_3). Diese Fläche wäre mit $F^5_{3,3T}$ zu bezeichnen.

Kombination mit der ersten Methode würde noch einen einzelnen Doppelpunkt D hinzufügen, also zu einer Fläche mit der Bezeichnung $F^5_{3,1D,3T}$ führen.

Fall 4. Die Flächen des Büschels 3. Ordnung haben ausser einem kubischen Bestandteil D^3 ihrer Grundkurve noch vier Doppelpunkte gemeinsam.

40. Ist F^3 eine Fläche 3. Ordnung mit den vier Knotenpunkten K_1, K_2, K_3, K_4, die auch Knotenpunkte einer anderen kubischen Fläche $F_1{}^3$ sind, so haben beide Flächen von selbst noch deren sechs Verbindungslinien gemeinsam. Ihr Restschnitt, der sie zur Kurve 9. Ordnung ergänzt, ist also 3. Ordnung und muss, da K_1, ... K_4 für den vollen Schnitt vierfach sind, durch jeden dieser vier Punkte gehen, ist also notwendig eine kubische Raumkurve; sie möge D^3 heissen.

Der kubische Flächenbüschel, den zwei solche Flächen F^3 und F^3_1 konstituieren, führt dann in der mehrfach angegebenen Weise zu Flächen 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve D^3 und vier auf dieser gelegenen dreifachen Punkten (K_1, ... K_4 sc. T_1 . . . . T_4), „$F^5_{3,4T}$“.

Wollten wir auch hier noch mit der ersten Methode der Spezialisierung kombinieren, so müssten wir die Doppelsekante g von D^3 eine der sechs Verbindungsgeraden zweier der vier Knotenpunkte treffen lassen; da diese aber selbst Doppelsekanten von D^3 sind, müsste g dann mit einer von ihnen ganz zusammenfallen, wäre also gleichzeitig Bestandteil der Grundkurven des Büschels 2. und 3. Ordnung und folglich eine Doppelgerade der erzeugten Fläche, die dann eine (zerfallene) Doppelkurve 4. Ordnung 1. Art besässe.

Da eine Fläche 3. Ordnung nicht mehr als vier einzelne Doppelpunkte besitzen kann, so bricht hiermit diese dritte Methode der Spezialisierung der allgemeinen Erzeugung ab.

§ 14.

Obere Grenze für die Zahl der dreifachen und doppelten Punkte.

Die Fläche 5. Ordnung mit kubischer Doppelkurve und fünf auf dieser gelegenen dreifachen Punkten. $F^5_{3,5T}$.

41. Nachdem sich im vorhergehenden Flächen 5. Ordnung mit kubischer Doppelkurve und bis zu vier auf dieser gelegenen dreifachen Punkten ergeben haben, möge nun für die Anzahl derselben eine obere Grenze aufgesucht werden:

Wir denken uns dazu einmal eine Fläche 5. Ordnung mit kubischer Doppelkurve D^3, auf der wir sechs dreifache Punkte, T_1, T_2, . . . T_6, annehmen. Dann gehören u. a. die fünf Verbindungsgeraden von T_6 mit T_1, T_2, . . . T_5 der wegen ihrer sechs Schnittpunkte ganz an. Der Kegel , welcher D^3 von T_6 aus projiziert, hätte also mit 5. Ordnung die Doppelkurve D^3 sowie die fünf Verbindungsgeraden von T_6 mit T_1 . . . T_5 gemeinsam; der Gesamtschnitt wäre von der Ordnung $2.3 + 5.1 = 11$, was aber nicht möglich ist. Die Annahme erweist sich als falsch, und es ergibt sich: Eine Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve kann nicht sechs auf dieser gelegene dreifache Punkte haben. Dass die Fläche vier solcher Punkte besitzen kann, haben wir bereits vorhin gefunden. Wir betrachten daher jetzt den noch möglichen Zwischenfall, wo fünf dreifache Punkte, T_1, T_2, . . . T_5 auf der Doppelkurve D^3 liegen, d. h. eine Fläche $F^5_{3,5T}$.

Da das Verfahren, welches bei der allgemeinen Fläche F_3^5 sowie einigen einfacheren Spezialfällen ($F^5_{3,1D}$; $F^5_{3,1T}$) zur Auffindung der Geraden diente, hier sehr umständlich wird, möge ein anderer Weg eingeschlagen werden. Wir fanden im Verlaufe früherer Untersuchungen (Nr. 36, S. 100);

dass das Hinzutreten eines dreifachen Punktes T (immer auf D^3) die Zahl 11 der Geraden der allgemeinen Fläche nicht ändert, sondern nur ihre gegenseitige Lage. Nun lassen sich auf unserer jetzigen Fläche $F^5_{3,5T}$ leicht zehn Geraden angeben: die $\frac{5.4}{1.2} = 10$ Verbindungsgeraden der fünf dreifachen Punkte. Mithin verbleibt noch eine Gerade. Diese darf auch nicht einen dreifachen Punkt enthalten, wie dies einerseits aus der vollen Gleichberechtigung aller fünf Punkte T, andererseits auch aus dem Umstande folgt, dass von jedem Punkt T insgesamt $2.5 - 3.2 = 4$ Geraden der Fläche ausgehen, die hier durch seine Verbindungslinien mit den übrigen vier dreifachen Punkten erschöpft sind. Die gesuchte elfte Gerade muss natürlich auch Doppelsekante der D^3 sein. Alle ∞^2 Flächen 2. Ordnung durch D^3 schneiden unsere Fläche $F^5_{3,5T}$ in Raumkurven 4. Ordnung 2. Art, welche D^3 in 5 festen und 2 veränderlichen Punkten treffen.

Die ∞^1 Flächen 2. Ordnung durch D^3 und g schneiden aber nur noch kubische Raumkurven aus, welche g einmal, D^3 in den fünf festen Punkten T_1, T_2, . . . T_5 treffen. Darnach müsste sich jede solche Fläche $F^5_{3,5T}$ ergeben als Kontinuum von ∞^1 kubischen Raumkurven, welche ihre Doppelkurve D^3 in den fünf festen Punkten T_1, . . . T_5, ihre Gerade g je einmal treffen. Nun lässt sich aber in der Tat beweisen, dass die ∞^1 kubischen Raumkurven, welche durch fünf feste Punkte T_1, . . . T_5 des Raumes gehen und eine feste Gerade g einmal treffen, eine Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve D^3 und jenen fünf Punkten als auf ihr gelegenen dreifachen Punkten erzeugen. D^3 ist diejenige unter den ∞^1 kubischen Kurven, welche g zweimal trifft. Der Beweis ist[1]) folgender: Wir nehmen zwei der fünf Punkte T_1, . . . T_5, etwa T_4 und T_5, konstruieren bei beiden den Büschel der Kegel nach den vier übrigen Punkten und bringen diese beiden Büschel in eine Korrespondenz, in der sich zwei Kegel entsprechen, welche auf g einen

[1]) Nach Prof. Sturm.

Punkt G gemeinsam haben; die kubische Restschnittkurve, die zwei solche Kegel ausser der Gerade $T_4\ T_5$ gemeinsam haben, geht dann durch $T_1, \ldots T_5$ und diesen Punkt G von g. Jeder Kegel des einen Büschels schneidet g in zwei Punkten, und durch jeden geht ein Kegel des andern Büschels; die in Rede stehende Korrespondenz ist also eine Korrespondenz (2,2). Auf einer beliebigen Gerade x des Raumes entsteht eine Korrespondenz (4,4), wenn man solche Punkte als entsprechende nimmt, die auf Kegeln liegen, welche sich in der Korrespondenz (2,2) entsprechen. Diese Korrespondenz (4,4) hat acht Koïnzidenzen d. h. achtmal begegnen sich zwei entsprechende Kegel beider Büschel auf x. Zu diesen acht Koïnzidenzpunkten gehören aber stets drei, welche von den zerfallenden und sich in der Korrespondenz (2,2) entsprechenden Kegeln $T_5\ (T_1\ T_2, T_3\ T_4)$, $T_4\ (T_1\ T_2, T_3\ T_5)$; $T_5\ (T_2\ T_3, T_4\ T_1)$, $T_4\ (T_2\ T_3, T_5\ T_1)$; $T_5\ (T_3\ T_1, T_2\ T_4)$, $T_4\ (T_3\ T_1, T_2\ T_5)$ herrühren. Diese drei Koïnzidenzen liefern die drei Ebenen $T_5\ T_4\ T_3$, $T_5\ T_4\ T_1$, $T_5\ T_4\ T_2$. Die $8-3=5$ übrigen Koïnzidenzen beweisen, dass es fünf kubische Raumkurven durch $T_1 \ldots T_5$ gibt, welche g und eine beliebige Gerade des Raumes treffen, oder dass die Fläche der kubischen Kurven durch $T_1 \ldots T_5$, welche g einmal treffen, 5. Ordnung ist.

Dass auf ihr die kubische Raumkurve D^3, welche g zweimal trifft, Doppelkurve ist, folgt, wenn man die Gerade g Punkt für Punkt durchläuft und berücksichtigt, dass 6 Punkte oder 5 Punkte und eine Sehne (g) eine kubische Raumkurve eindeutig festlegen.

Dass ferner die Punkte $T_1, \ldots T_5$ dreifach sind, z. B. T_5, ergibt sich mit Hilfe einer durch ihn gehenden Gerade l. Dem einen Kegel, welcher durch $T_5\ (T_1, T_2, T_3, T_4)$ und l geht, entsprechen zwei Kegel im anderen Büschel mit T_4 als gemeinsamer Spitze, von deren $2+2=4$ Schnittpunkten auf l zwei nach T_5 fallen, sodass nur noch zwei Flächenpunkte auf l ausserhalb T_5 liegen, dieser also für die Fläche $5-2=3$fach ist.

Diese Entstehungsweise, auf die wir durch Betrachtung einer im voraus angenommenen Fläche $F^5_{3,5T}$ geführt worden sind, gibt uns nun wirklich auch die Gewähr für die Existenz solcher Flächen[1]).

Ihre Mannigfaltigkeit ergibt sich aus der Mannigfaltigkeit ∞^{29} der allgemeinen Fläche F_3^5 und der Tatsache, dass jeder hinzutretende dreifache Punkt, deren Mannigfaltigkeit um zwei vermindert (Nr. 36, S. 102) als $\infty^{29-5.2} = \infty^{19}$. Es gibt also ∞^{19} Flächen $F^5_{3,5T}$ . .

Dies lässt sich auch leicht aus der Entstehungsweise solcher Flächen erschliessen: Die fünf Punkte $T_1, \ldots T_5$ können auf $\infty^{5.3}$, die Gerade g auf ∞^4, alle zusammen also auf $\infty^{5.3+4} = \infty^{19}$ Weisen gewählt werden. Bei jeder Wahl ergibt sich eine Fläche $F^5_{3,5T}$ und jede solche Fläche entsteht nur einmal (also endlich oft) in dieser Weise.

Um die Kegelschnitte der Fläche $F^5_{3,5T}$ aufzufinden, verfahren wir wie im allgemeinen Falle: Wir kombinieren zwei Geraden der Fläche und legen durch diese sowie durch D^3 die Fläche 2. Ordnung.

Die Fläche 2. Ordnung durch ein Paar von Geraden, die sich in einem dreifachen Punkt treffen, schneidet noch ein Paar von Geraden, die beiden anderen, durch diesen Punkt gehenden Geraden, aus; der Beweis ist derselbe wie bei $F^5_{3,1T}$. Im ganzen ergeben sich so $5.\frac{4.3}{1.2} = 30$ zerfallene Kegelschnitte der Fläche.

Ferner kann man auf 5.3 Weisen zwei jener 10 Geraden zusammenstellen, welche zwei Paar verschiedener dreifacher Punkte verbinden; sie führen zu Kegelschnitten, welche einen dreifachen Punkt auf D^3 enthalten, denjenigen, welcher von den 2.2 Stützpunkten ihrer beiden Stützgeraden verschieden ist.

Schliesslich lässt sich noch jede der 10 Verbindungsgeraden zweier dreifachen Punkte mit g kombinieren, was

---

[1]) Ueber sie handelt: Reye, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. XIII S. 525. Del Re, Atti della R. Acc. dei Lincei 1893. Serie V 2, 2.

zu 10 Kegelschnitten der Fläche führt; diese treffen D^3 in drei dreifachen Punkten, denjenigen, welche von den zwei dreifachen Stützpunkten ihrer einen Stützgerade verschieden sind. Das Resultat ist also:

Die Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve D^3 und fünf auf dieser gelegenen dreifachen Punkten besitzt im ganzen 25 Kegelschnitte, von denen 15 die Doppelkurve in einem, 10 in drei dreifachen Punkten treffen.

Die 30 zerfallenen Kegelschnitte ergänzen die 25 eigentlichen zu den 55 Kegelschnitten der allgemeinen Fläche F^5_3.

42. Zum Schlusse möge noch die Frage beantwortet werden, wie viele einzelne Doppelpunkte die Fläche F_3^5 ausserhalb ihrer Doppelkurve D^3 besitzen kann. Nach einem früher gefundenen Ergebnis (No. 31, S. 84.), demzufolge jeder Doppelpunkt D durch seine an D^2 gehende Doppelsekante zu einer Gerade der Fläche führt, welche zwei Geraden der allgemeinen doppelpunktsfreien Fläche respräsentiert, müssten sechs etwaige Doppelpunkte auf $6.2 = 12$ Geraden der allgemeinen Fläche führen, was aber nicht möglich ist, denn deren Zahl beträgt nur 11.

Dieses Argument wird hinfällig, wenn die mehr als fünf Doppelpunkte sich auf nur fünf Doppelsekanten von D^3 verteilen. Seien also D_1, D_2 zwei auf derselben Doppelsekante g_{12} von D^3 gelegene Doppelpunkte der Fläche F^5_3. Eine beliebige der ∞^1 Flächen 2. Ordnung durch D^3, g_{12} schneidet unsere Fläche 5. Ordnung noch in einer D^3 fünfmal treffenden kubischen Raumkurve R^3 des zu g_{12} gehörigen Büschels, die durch D_1 und D_2, weil sie Doppelpunkte des vollen Schnittes sind, je einmal hindurchgehen muss. Da also die beiden auf einer und derselben Fläche 2. Ordnung liegenden kubischen Raumkurven R^3 und D^3 die Gerade g_{12} der Fläche jede zweimal treffen, müssen sie zu derselben Schar ihrer kubischen Kurven gehören, da sie sich aber fünfmal begegnen, zu verschiedenen Scharen. Und da R^3 bei beliebiger Auswahl der sie ausschneidenden Fläche eine eigentliche Kurve ist, d. h. nicht in g_{12} und

diese einmal treffenden Kegelschnitt zerfallen kann, so ergibt sich ein Widerspruch. Die obige Annahme, dass zwei zu F^5_3 hinzutretende Doppelpunkte auf einer und derselben Doppelsekante ihrer Doppelkurve D^3 liegen, ist nicht möglich. Daraus folgt dann aber auf Grund des ersterhaltenen Ergebnisses, dass eine Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve höchstens fünf ausserhalb dieser gelegene Doppelpunkte besitzen kann. Die Zahl fünf spielt hierbei nur die Rolle einer oberen Grenze. Über die Existenz von Flächen F^5_3 mit fünf einzelnen Doppelpunkten ist damit noch nichts bewiesen.

Inhalt.

Seite

Einleitung 7

§ 1. Die elf Geraden der Fläche 9

§ 2. Ein doppelt unendliches System von Kurven R^4_{11} Elf einfach unendliche Systeme von R^3. Die 55 Kegelschnitte der Fläche 11

§ 3. Lagebeziehungen der Kegelschnitte unter einander sowie zu den bereits gefundenen Raumkurven 3. und 4. Ordnung. 19

§ 4. Projektive Erzeugungsweise der Fläche 29

§ 5. Mannigfaltigkeitsbetrachtungen. 35

§ 6. Ebene Kurven 3., 4. und 5. Ordnung. Die dreifachen Berührungsebenen der Fläche. Abbildung der Fläche auf eine Ebene 38

§ 7. Die Klasse der Fläche 52

§ 8. 462 einzelne Raumkurven 3. Ordnung der Fläche . . . 53

§ 9. Raumkurven 4. Ordnung 2. Art 65

§ 10. Raumkurven 4. Ordnung 1. Art. 73

Spezialisierung der Fläche
durch neu hinzutretende Singularitäten.

§ 11. I. Methode der Spezialisierung. Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und einem vereinzelten Doppelpunkt 80

§ 12. II. Methode der Spezialisierung. Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und 1 bis 4 einzelnen Doppelpunkten 87

§ 13. III. Methode der Spezialisierung. Hinzutreten von zusammen höchstens 4 doppelten und dreifachen Punkten. 94

§ 14. Obere Grenze für die Zahl der dreifachen und doppelten Punkte. Die Fläche 5. Ordnung mit doppelter kubischer Raumkurve und fünf auf dieser gelegenen dreifachen Punkten 108

Lebenslauf.

Ich, Waldemar Jaeckel, evangelischer Konfession, bin geboren am 5. März 1880 zu Breslau als Sohn des Postsekretärs Adolf Jaeckel. Zuerst besuchte ich drei Jahre lang die hiesige Ev. höhere Bürgerschule Nr. II, die übrige Zeit das städt. Johannes-Gymnasium, das ich Ostern 1898 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Darauf studierte ich an der hiesigen Universität während elf Semestern Mathematik und Naturwissenschaften. Am 21. November 1903 bestand ich das Doktorexamen.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen und Uebungen der Herren Professoren:

F. Cohn †, Ebbinghaus, Franz, Freudenthal, Heydweiller, Hintze, Ladenburg, London, O. E. Meyer, Neumann, Rosanes, Sturm.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders aber Herrn Prof. Sturm fühle ich mich zum tiefsten Dank verpflichtet.

Thesen.

1. Mit Recht sagt d'Alembert einmal im Hinblick auf das Studium der Mathematik: Allez en avant et la foi vous viendra.
2. Der mathematische Unterricht der Schule muss sich durch die Anforderungen, wie sie die Physik, die mathematische Geographie sowie schliesslich das gesamte praktische Leben stellt, leiten lassen.
3. In den Worten Francis Bacons: „Solida et fructuosa naturalis philosophia duplicem adhibet scalam eamque diversam: ab experientia ad axiomata, ab axiomatibus ad nova inventa." (De dign. et augm. scient. Lib. III.) ist das Grundprinzip aller naturwissenschaftlichen Forschung ausgesprochen.